



# Alternativa para el cálculo de las alturas reducidas sobre una tierra esférica

José Rafael Sandianes Gálvez

## RESUMEN / ABSTRACT

Al determinar las zonas de cobertura de los servicios de: radio móvil, televisión y otros emisores de ondas ultracortas (OUC), así como al realizar el cálculo de las líneas de radio enlace o de alcance de radar, es necesario pronosticar la intensidad del campo eléctrico  $E$  considerando la esfericidad de la Tierra. Este pronóstico, en la región o zona iluminada, se realiza empleando las expresiones de tierra plana, pero con las alturas de las antenas reducidas en vez de las alturas reales. Las alturas reducidas (AR) disminuyen al incrementarse la distancia  $R$ , siendo más notable la afectación al acercarnos al límite máximo de la distancia de visibilidad directa:  $R_0$ . Este límite es importante al determinar la cobertura o el rango de los servicios de radio mencionados. En el trabajo se resumen las expresiones presentes en la literatura para el cálculo de las AR en esas condiciones, pero el objetivo principal es proponer expresiones derivadas de ellas y que dependen del parámetro de distancia relativa  $\zeta$  de  $R$  respecto a  $R_0$  y de la relación  $m$  de alturas de las antenas. Con esta proposición se desea facilitar el análisis y el cálculo de las AR a través de dependencias normalizadas, con lo que se evitan recurrencias innecesarias y se reduce el tiempo de procesamiento, incluso al emplear computadoras digitales.

*Palabras claves:* Alturas reducidas, distancia máxima de visibilidad directa, zona iluminada, zonas de cobertura.

*During determination of coverage zones of radio mobile services, transmitters of television and others emitters of ultra-short-waves and, also, when is realized the analysis of radio relay lines or radar range, is necessary to predict the intensity  $E$  of electric field taking on account Earth's sphericity. This prediction is realized, in illuminated region or zone, using earth's plane expressions, but taking reduced heights instead of real heights. Reduced heights (RH) diminish when distance  $R$  grows, but is more notable the affectations when we are near the limit of maximum direct visibility distance:  $R_0$ . The limit distance  $R_0$  is an important magnitude during determination of coverage in cited radio services. In this article are summarized expressions present in references but the main objective is propose another derivate expressions that depends of relatives distances  $\zeta$  and relation  $m$  of antennas heights. With this proposition is wished to facilitate the analysis and calculation of RH, but with normalized dependences, avoiding unnecessary recurrences and with reduced processing time of computing calculations.*

**Key words:** reduced heights, range of direct visibility, illuminated zones, coverage zones.

*Alternative for calculation of reduced heights over a spherical earth*

## 1.- INTRODUCCIÓN

Al pronosticar la cobertura de un emisor de ondas de radio por el nivel de la intensidad del campo eléctrico  $E$  en el punto receptor y para el caso de la propagación de las ondas de radio (POR) por el modo de onda terrestre con antenas elevadas, se requiere tener en cuenta la esfericidad de la Tierra debido a su curvatura. Este modo de la POR es predominante en la banda de ondas ultracortas (OUC), a frecuencias por encima de 30 MHz, y se manifiesta como resultado de la interferencia (ver Fig. 1), entre el campo del rayo de la onda directa entre las antenas y el rayo de la onda reflejada, en su forma más simple, sobre una superficie lisa del terreno [1-5]. Por otro lado, es conocido que en la zona lejana de las antenas, a medida que el punto receptor se aleja del emisor, el campo  $E$  disminuye debido al efecto de la dispersión por la expansión de los frentes de ondas,

Recibido: 8/7/2020      Aceptado: 29/12/2020

así como debido a otros factores como son: la atenuación de la atmósfera por los gases que la componen y los hidrometeoros, las irregularidades de la superficie del terreno, etc., o en el caso del mar, su estado, el que depende de las alturas de las olas. El efecto de las heterogeneidades del terreno ha dado lugar a que el simple modelo de dos rayos que se interfieren sea complementado en modelos híbridos o compuestos, los que posibilitan una mayor exactitud en la determinación del campo [6,7]. No obstante, se comprende que estos efectos no pueden constituir objeto de este artículo por su complejidad.

En las condiciones ideales de tierra lisa, el campo de interferencia (CI) es calculado, al considerar la esfericidad terrestre, utilizando las alturas reducidas (AR):  $h_1$  y  $h_2$ , en vez de las alturas reales:  $h_1$ ,  $h_2$  (Fig. 1). Es posible mostrar que el campo resultante  $\vec{E}$  se obtiene como producto del campo en el espacio libre  $E_0$ , y un factor complejo  $\vec{F}$ , denominado factor de interferencia, cuyo valor modular es  $F$ , de modo que:  $E = E_0 \cdot F$ , siendo  $E$  el módulo del campo  $\vec{E}$  [1-5]. De inicio se ha considerado que las alturas reales y las reducidas se toman sobre el nivel del mar:  $h_g=0$ ; en un modelo que considere el relieve del terreno puede tomarse otro nivel de referencia  $h_g$ , lo que reduce las alturas [5, 8-12].

Las expresiones que se presentan en la literatura -como resultado de la solución de una ecuación cúbica-, permiten la determinación de las AR, después de hallar las distancias  $R_1$  o  $R_2$  que se miden hasta el punto de tangencia O (Fig. 1), las que no son conocidas previamente. La dificultad de no conocer de inicio  $R_1$  o  $R_2$  es solventada en gran medida, para el caso de cortas distancias, conocido como de tierra plana (TP) [1-5, 13], con expresiones específicas válidas solo hasta una distancia  $R_p$  (límite de TP) a determinar. La mayor dificultad se presenta para mayores distancias que  $R_p$ , por que las alturas son afectadas por la esfericidad de la tierra -caso de tierra esférica (TE)-. En ese caso hay que hallar primero  $R_1$  o  $R_2$ , lo que dificulta el análisis de la variación de las AR con la distancia  $R$ , o con las alturas de las antenas.

En los párrafos siguientes se expone, de inicio, el algoritmo matemático determinístico presentado en la literatura tradicional, basado en los métodos del trazado de rayos y de la Óptica Geométrica [3-5, 13-15]. En la actualidad los métodos determinísticos [6,7, 16-23], se mantienen como una alternativa para el cálculo del campo  $E$  con resultados satisfactorios similares a los obtenidos con métodos numéricos, y son de aplicabilidad práctica a diferentes entornos [3,6,7,10,11]: urbanos; rurales con presencia de múltiples obstáculos; sobre el mar, etc. Entre los métodos numéricos se consideran a la vez variantes de solución, por ejemplo: los que emplean la ecuación parabólica (PE), en trayectos simples sobre terrenos irregulares de una vía [24-29], o de doble vía sobre el mar, útil en radar [29]; la Teoría Uniforme de la Difracción -UTD- [30], o las soluciones de ecuaciones integrales de Kirchoff-Fresnel [31-33]. Sin embargo, los métodos numéricos, en general, requieren más tiempo de cómputo [18] y pueden estar comprometidos por los medios computacionales disponibles.

Con lo expresado se quiere significar la robustez con que se mantiene en la actualidad la aplicación de los métodos determinísticos, en forma simple o combinados como métodos híbridos, en diferentes alternativas, y la conveniencia de fortalecer los algoritmos empleados en los mismos. En el trabajo se expone, a continuación de la síntesis del algoritmo tradicional, la secuencia de cómo se han obtenido las expresiones derivadas de las tradicionales propuestas, las que se considera constituyen una alternativa para el cálculo de las AR y, sobre todo, para facilitar el análisis de la dependencia de estas alturas de la distancia  $R$  o de las alturas reales.

La contribución principal del presente trabajo es una propuesta de expresiones, novedosas a juicio del autor, y no conocidas en la literatura, para el cálculo de las AR, de las que se derivan curvas de su dependencia de la distancia  $R$  normalizada respecto a la DMVD ( $R_0$ ) -la cual se define en el próximo párrafo- y de las alturas normalizadas de las antenas. Estas expresiones son válidas para todo el rango de distancias hasta  $R_0$ . El objetivo principal del artículo es exponer el fundamento científico matemático de esta proposición y significar su novedad.

En un contexto práctico, al determinar coberturas de estaciones de radio, al calcular líneas de radioenlace, o definir el alcance de un radar, en los cuales se requiera un cálculo secuencial de las AR con  $R$ , es conveniente contar con expresiones que de forma directa permitan, además, el análisis de su variación con la distancia y la relación de alturas. Mayor importancia adquieren esas expresiones al desarrollar programas secuenciales con ayuda de MCD (computadores digitales). Precisamente estas expresiones fueron utilizadas en los cálculos de las coberturas para sistemas de comunicaciones móviles y de TV descritos en las referencias [9, 10].

## 2.- EXPRESIONES TRADICIONALES DE CÁLCULO DE LAS AR

En esta sección se hace un breve recuento de las expresiones que se emplean tradicionalmente para calcular las AR y se dan a conocer, además, otras expresiones aproximadas que han sido propuestas y que merecen una valoración. El punto de partida son los datos que se relacionan con la Fig. 1. Las AR, sobre una TE, lisa y con atmósfera refractiva, son calculadas usualmente a partir de las relaciones [1-5]:

$$h'_{1,2} = h_{1,2} - \Delta h_{1,2}$$

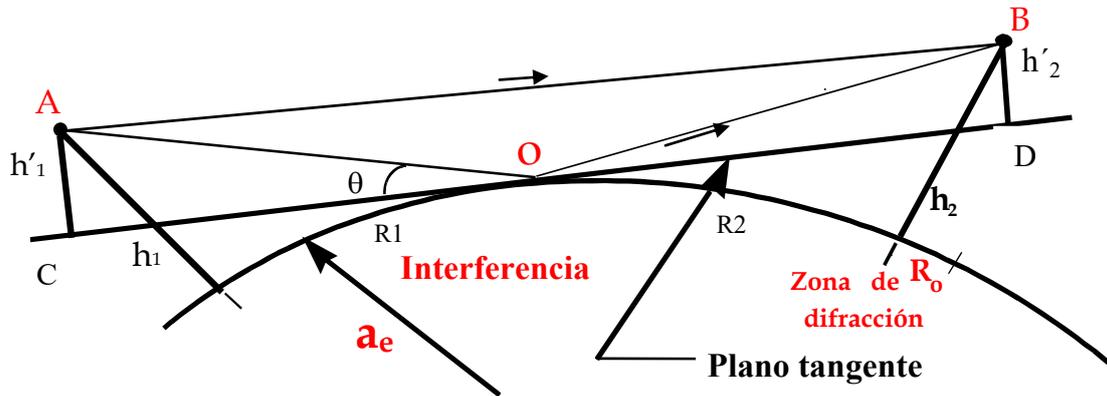


Figura 1  
 Alturas reducidas  $h'_1$  y  $h'_2$  sobre una tierra esférica

donde:  $\Delta h_1$  y  $\Delta h_2$ , son los intervalos de alturas medidos desde el terreno, en los puntos donde están situadas las antenas, hasta la línea del plano CD que pasa por el punto de tangencia O. De este modo se obtiene que:

$$h'_1 = h_1 - \frac{R_1^2}{2ka} \quad (1)$$

$$h'_2 = h_2 - \frac{R_2^2}{2ka} \quad (2)$$

o también,

$$h'_2 = h_2 - \frac{(R - R_1)^2}{2ka} \quad (3)$$

donde:  $R_1, R_2$  – son las distancias entre el transmisor (receptor) y el punto  $O$  de reflexión de la onda en el terreno;  $a = 6370$  km, es el radio medio de la Tierra y  $R \cong R_1 + R_2$ . Se observa que en estas expresiones se consideran los efectos de la refracción de las ondas en la atmósfera a través del factor de radio ficticio  $k$ , pues, en condiciones refractivas, es necesario emplear, en vez de  $a$ , el radio ficticio de la Tierra:  $a_e = ka$ , en la región de estudio. En condiciones no refractivas,  $k=1$ .

Cuando el trayecto de propagación tiene una longitud  $R$  muy inferior a la **distancia máxima de visibilidad directa (DMVD)** hasta el horizonte  $R_o$  (expresión 8), o sea en una condición próxima a la de una TP, es válido escribir al considerar que los triángulos son semejantes en la Fig. 1, que [1-4]:

$$R_1 = \frac{h_1}{h_1 + h_2} R \quad (4)$$

y

$$R_2 = \frac{h_2}{h_1 + h_2} R \quad (5)$$

Al sustituir las expresiones (4) y (5) en (1) y (2), se obtienen las conocidas expresiones de las AR para el caso de TP:

$$h'_1 = h_1 - \frac{R^2}{2ka} \frac{h_1^2}{(h_1 + h_2)^2} \quad (6)$$

$$h'_2 = h_2 - \frac{R^2}{2ka} \frac{h_2^2}{(h_1 + h_2)^2} \quad (7)$$

en las que R, a y h, deben tomarse en metros.

Más allá del límite del horizonte  $R_o$ , en ausencia de visibilidad directa, el CI debe ser nulo, por lo que predomina el campo de difracción [1-5]. Lo expresado se confirma en la fórmula cuadrática de Vvedenski [1-6], según la cual, en las condiciones de TE, el CI es proporcional al producto de las alturas reducidas:  $h'_1$  y  $h'_2$ , y no de las reales. Entonces, es necesario que en  $R_o$ , al menos una de esas alturas sea nula. No obstante, al sustituir R en (6) y (7) por su valor extremo  $R_o$ , siendo:

$$R_o = \sqrt{2ka}(\sqrt{h_1} + \sqrt{h_2}) \quad (8)$$

no se logra anular el valor de las AR. Para ello, es necesario modificar las expresiones (6) y (7), lo cual requiere que las alturas de las antenas:  $h_1$  y  $h_2$ , sean sustituidas por sus valores afectados por la raíz cuadrada, o sea por:  $\sqrt{h_1}$ ,  $\sqrt{h_2}$ . En la expresión (8) de  $R_o$  se han considerado las condiciones de una atmósfera refractiva al sustituir en ella  $a$  por  $a_o$  o  $(ka)$ .

En la referencia [1] se considera la coordenada relativa  $k_1$  para  $R_1$ , y se definen los parámetros auxiliares  $A_o$  y  $B_o$ , o sea:

$$k_1 = \frac{R_1}{R} \quad (9)$$

$$A_o = \frac{2a_e h_1}{R^2} \quad (10)$$

$$B_o = \frac{2a_e h_2}{R^2} \quad (11)$$

expresiones estas en las que se han incluido las condiciones de una atmósfera refractiva.

Con estas relaciones, las fórmulas (1) y (3) para una TE, se transforman en:

$$h'_1 = h_1 \left( 1 - \frac{k_1^2}{A_o} \right) \quad (12)$$

y

$$h'_2 = h_2 \left( 1 - \frac{(1 - k_1)^2}{B_o} \right) \quad (13)$$

Aquí,  $R_2 = R - R_1 = R(1 - k_1)$ . Compárese las expresiones (12) y (13) con las expresiones (6) y (7).

Es de notar que al considerar (4),  $k_1$  toma el valor:

$$k_{1o} = \frac{h_1}{h_1 + h_2} \quad (14)$$

característico del caso de TP. Sin embargo, si ( $R \rightarrow R_o$ ),  $k_1$  debe tomar el valor:

$$k_{1Ro} = \frac{\sqrt{h_1}}{\sqrt{h_1} + \sqrt{h_2}} \quad (15)$$

Esto muestra la variabilidad de  $k_1$  al variar  $R$  y su dependencia de las alturas. Cuando  $h_1 = h_2$ ,  $k_1 = 0.5$  en ambos casos.

De la geometría de la Fig. 1, como ( $R \gg h_{1,2}$ ) el ángulo de incidencia sobre el plano tangente es igual al ángulo de reflexión y se obtiene que los triángulos AOC y BOD son semejantes, por lo que:

$$\frac{h'_1}{k_1 R} = \frac{h'_2}{(1-k_1)R} \quad (16)$$

Al considerar en (16) las expresiones (12-13), se obtiene [1,2]:

$$\frac{A_o - k_1^2}{B_o - (1 - k_1^2)} = \frac{k_1}{1 - k_1} \quad (17)$$

y al despejar se logra una ecuación de tercer grado de la variable  $k_1$ , o sea:

$$2k_1^3 - 3k_1^2 - k_1 C_o + A_o = 0 \quad (18)$$

aquí:  $C_o = 1 - (A_o + B_o)$ . La dificultad de la solución de (18) es que sus parámetros no son constantes, pues dependen de  $R$ . De las tres raíces de la ecuación cúbica se identifica una sola solución válida, lo que se deduce de las gráficas de cada solución respecto a  $k_1$ , lo cual está en correspondencia con el proceso físico presente. Otra variante de solución del problema propuesto es aquella en que en vez de  $k_1$ , se halla  $R_1$  [4-5, 14-15]. La solución trigonométrica en ese caso se expresa por:

$$R_1 = \frac{R}{2} + p \cos\left(\frac{\phi}{3} + 60^\circ\right) \quad (19)$$

donde  $p$  y  $\phi$  vienen dados por [4, 15, 34, 35]:

$$p = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{a_e(h_1 + h_2) + \left(\frac{R}{2}\right)^2} \quad (20)$$

$$\phi = \cos^{-1} \left[ \frac{2a_e(h_2 - h_1)R}{p^3} \right] \quad (21)$$

Se ha supuesto hasta ahora que:  $h_2 > h_1$ . Si  $h_1 > h_2$ , entonces, en (21) se pone  $(h_1 - h_2)$  y en la expresión (19) se obtiene  $R_2$  [5]. Al contar con  $R_1$  (o  $R_2$ ), se hallan las alturas sobre el plano tangente al punto de reflexión O mediante las expresiones (6) y (7). Como se ve en estos casos, la solución no es directa, requiere hallar primero  $R_1$  o  $R_2$ ; en la literatura se señala [3,4] que la solución requiere cálculos secuenciales voluminosos y ha sido obtenida durante mucho tiempo por medios gráficos [3]. Por ese motivo, y para facilitar los cálculos, en las referencias [1,2] se han propuesto soluciones más sencillas y válidas para todo

$R$  al tomar:  $\zeta = \frac{R}{R_o}$ , es decir:

$$h'_1 = h_1(1 - \zeta^2) \quad (22)$$

$$h'_2 = h_2(1 - \zeta^2) \quad (23)$$

Es evidente que con esta proposición, cuando  $R \rightarrow R_o$ , los valores de  $h'_1$  y de  $h'_2$  se aproximan a cero y se cumple así un requisito de las fórmulas de interferencia, aunque para ambas alturas simultáneamente. Con las relaciones (22) y (23) se evita la recurrencia del parámetro  $k_1$  con  $R$  y se facilita el trabajo con la ayuda de MCD o durante una realización manual. Sin embargo, estas relaciones obvian la dependencia de las alturas  $AR$ , respecto a  $h_1$  y  $h_2$ , en  $A_o$  y  $B_o$ .

En determinadas aplicaciones radiotécnicas, por ejemplo, al realizar cálculos de coberturas de los emisores de OUC (antenas elevadas), sobre determinadas áreas del terreno, o sobre trayectos (carreteras, caminos, etc.), es necesario predecir la intensidad del campo  $E$  en un gran rango de distancias. Los radios de cobertura pueden alcanzar decenas de km y, a veces,

acercarse a la DMVD, por tanto, el cálculo de  $k_1$  requiere el empleo de expresiones directas fiables y aplicables a todas las distancias.

A continuación, se expone una alternativa de solución analítica al problema, a partir de las relaciones propuestas por Kalinin, planteada en (18), y que son equivalentes al procedimiento de Domb [3-5, 14-15]. Con esta proposición alternativa se obvia la recurrencia analizada en el párrafo anterior.

### 3.- PROPUESTA DE EXPRESIONES ALTERNATIVAS PARA EL CÁLCULO DE LAS AR

Primero, a partir de (17), planteada por Kalinin, se transforma la ecuación cúbica (18) y sus parámetros. La solución, derivada de las expresiones originales, debe facilitar el análisis del comportamiento de las AR al variar R; se considera:  $m = \frac{h_1}{h_2}$ . La ecuación, después de transformada es del tipo [34,35]:

$$y^3 + 3py + 2q = 0 \quad (24)$$

para lo cual se ha tomado:  $k_1 = (y + 0.5)$ , como variable de transformación. Para esta ecuación, con el empleo de las expresiones propuestas en [34], y las relaciones (9-11) se obtiene:

$$2q = \frac{A_o - B_o}{4} \quad (25)$$

$$3p = - \left[ \frac{2(A_o + B_o) + 1}{4} \right] \quad (26)$$

La mayor dificultad para encontrar una solución analítica radica en el discriminante de la ecuación (24) dado por:  $D = q^2 + p^3$ . Si  $D < 0$ , las tres raíces son reales, pero una sola de ellas debe estar acorde con el proceso físico planteado. Las raíces de la solución son:

$$y_n = 2\sqrt[3]{\rho} \cos\left(\frac{\phi}{3} + n\frac{\pi}{3}\right), \quad n = 0, 1, 2 \quad (27)$$

en las cuales:

$$\phi = \arccos\left(\frac{1 - A_o - B_o}{4\rho}\right) \quad (28)$$

y

$$\rho = (-p)^{3/2} \quad (29)$$

En este punto se puede tomar el camino de la determinación de  $k_1$  siguiendo (18), o plantear la solución a través de  $R_1$ , tal como propuso Domb, lo cual ya se ha visto en las expresiones (19-21). Para ambos casos, las relaciones (12) y (13) se pueden escribir de un modo más compacto como:

$$h'_1 = h_1 \circ \left(1 - \frac{k_1^2}{A_o}\right) = h_1 \circ g(\zeta, m) \quad (30)$$

$$h'_2 = h_2 \circ \left[1 - \left(\frac{(1 - k_1)^2}{B_o}\right)\right] = h_2 \circ g'(\zeta, m) \quad (31)$$

Se evidencia que las funciones:  $g(\zeta, m)$  y  $g'(\zeta, m)$  dependen de los valores relativos de distancia  $\zeta$  y de alturas  $m$ . La mayor virtud de la definición de estas funciones consiste en que, para cada juego de valores ( $\zeta, m$ ), se puede visualizar rápidamente el grado de influencia que la esfericidad de la Tierra tiene en las alturas reducidas de las antenas y su intervención en el CI.

Dentro del rango de distancias hasta  $R_o$ , o sea, cuando:  $0 < \zeta < 1$ , debe lograrse que las funciones  $\mathbf{g}$  y  $\mathbf{g}'$  cubran el rango:  $(0 \leq \mathbf{f}(\zeta, \mathbf{m}) \leq 1)$ . De las gráficas de  $y_n$  (expresión 27), esta condición se obtiene solo para  $n = 2$ . De inicio se ha tomado:

$m = \frac{h_1}{h_2}$  menor que 1, es decir,  $h_1$  es la menor de las alturas.

Por otro lado, la expresión de  $R_o$ , en función de  $\mathbf{m}$  puede escribirse de dos maneras:

$$R_o = \sqrt{2a_e h_2} (1 + \sqrt{m}) \quad (32)$$

o

$$R_o = \sqrt{2a_e h_1} \frac{(1 + \sqrt{m})}{\sqrt{m}} \quad (33)$$

y las relaciones (10) y (11), se transforman en:

$$A_o = \frac{m}{t^2} \quad (34)$$

$$B_o = \frac{1}{t^2} \quad (35)$$

donde:  $t^2 = \zeta^2 (1 + \sqrt{m})^2$ . Relación que se ha obtenido considerando las expresiones (10) y (11) con (32) y (33).

Ahora, al seguir el camino propuesto por Domb (expresiones 19-21), y al utilizar estas en la expresiones primarias (1) y (3), las funciones  $\mathbf{g}(R, h_1)$  y  $\mathbf{g}'(R, h_2)$  se presentan como:

$$\mathbf{g}(R, h_1) = 1 - \frac{(p \cdot \cos \phi_3 + 0.5R)^2}{2ah_1} \quad (36)$$

$$\mathbf{g}'(R, h_2) = 1 - \frac{[R - (p \cdot \cos \phi_3 + 0.5R)]^2}{2ah_2} \quad (37)$$

donde:  $\cos(\phi_3) = \cos(\phi/3 + 60^\circ)$ . Después de una serie de transformaciones de (25) y (26) se obtiene que:

$$p = \sqrt{\frac{2ah_2}{3}} [2(1+m) + t^2]^{0.5} \quad (38)$$

y

$$\cos \phi = \frac{3\sqrt{3}t(m-1)}{[2(1+m) + t^2]^{3/2}} \quad (39)$$

Con ello, finalmente, las expresiones (36) y (37) se expresan como:

$$\mathbf{g}(\zeta, m) = 1 - \frac{1}{m} \left\{ \frac{t}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}} [2(1+m) + t^2]^{0.5} \cos \phi_3 \right\}^2 \quad (40)$$

$$\mathbf{g}'(\zeta, m) = 1 - \left\{ \frac{t}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}} [2(1+m) + t^2]^{0.5} \cos \phi_3 \right\}^2 \quad (41)$$

Para el caso particular de una TP, estas expresiones se simplifican y se obtiene:

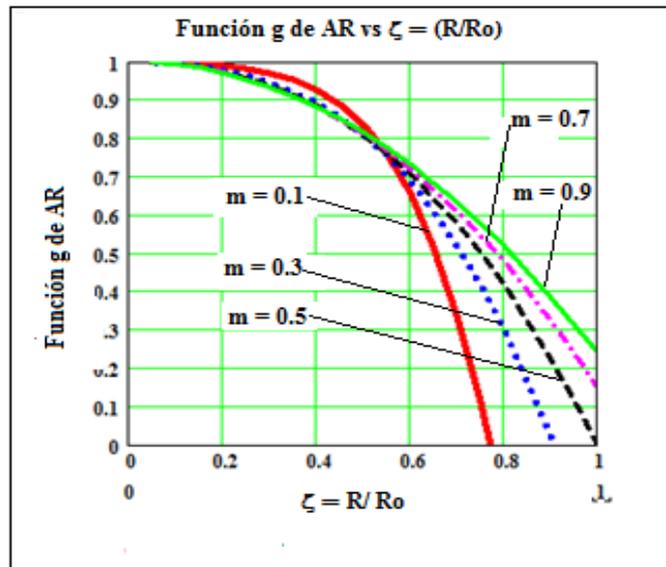
$$g_o(\zeta, m) = 1 - \frac{t^2 m}{(1+m)^2} \quad (42)$$

$$g'_o(\zeta, m) = 1 - \frac{t^2}{(1+m)^2} \tag{43}$$

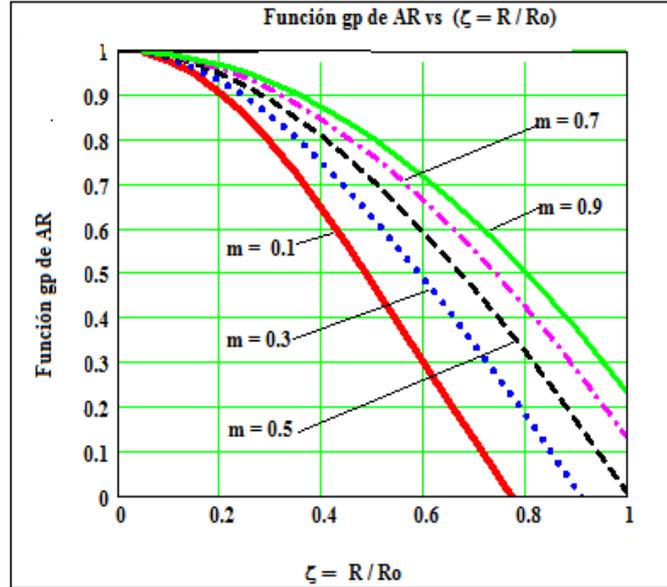
Las gráficas de las funciones:  $g(\zeta, m)$  y  $g'(\zeta, m)$ , -expresiones (40) y (41)- evaluadas en Mathcad, trazadas con diferentes valores de  $m$ : ( $m = 0.1 - 0.9$ ), y para:  $0 < \zeta \leq 1$ , se muestran en las Figs. 2 y 3. Se observa, en ambas, cómo la dependencia de las funciones respecto a  $\zeta$  (relacionada con  $R$  y  $R_o$ ), al inicio tienen un comportamiento de variación con la distancia “cuasi-lineal”, pero más allá del valor límite de TP, son inversamente proporcional a su cuadrado. La dependencia es más fuerte con menores valores de  $m$  (menores alturas  $h_1$  respecto a  $h_2$ ).

Es de gran interés conocer previamente hasta que distancia pueden emplearse las expresiones (42) y (43) para TP sin cometer un error apreciable. Para definir la situación se ha graficado el error  $\Delta_o$  que se comete al comparar los resultados que se logran mediante estas expresiones y los hallados mediante las más completas: (40) y (41). El error relativo (en %) se ha definido a partir de la expresión (44) y se muestra en las Figs. 4 y 5, para dos valores diferentes de  $m$ : ( $m= 0.1$  y  $0.9$ ), cercanos a los extremos de su rango de variación:

$$\Delta_o = \left| \frac{h'_{pr} - h'_o}{h'_{pr}} \right| * 100 \tag{44}$$



**Figura 2**  
Gráficas de la función  $g$  en función de  $\zeta$  y  $m$



**Figura 3**

**Gráficas de la función  $g'$  (gp) en función de  $\zeta$  y  $m$**

El análisis de ambas figuras evidencia dos cosas:

**Primero:**  $\Delta o$  (ó  $\Delta op$ ) es pequeño (menor del 3%) si:  $R < 0.3 R_o$ , lo cual ocurre en ambos valores de  $m$ . Similares resultados pueden mostrarse para otros valores intermedios.

**Segundo:** El resultado confirma que las expresiones más simples para la condición de TP se pueden considerar “solo para un rango pequeño de distancias” [1-5], el cual se propone definir hasta:  $R_{TP} \leq 0.3 R_o$ . Con frecuencia, el rango de TP se ha tomado hasta  $R \leq R_p$ , donde se considera:  $R_p = 12 \sqrt[3]{\lambda[m]} = \frac{80}{\sqrt[3]{f[MHz]}}$ . Este criterio ha sido demostrado por Feinberg con una constante de 7 [36], pero otros lo han aplicado con constantes que oscilan entre 7 y 20. No obstante, es un criterio más bien válido para las Ondas de Superficie irradiadas por antenas cercanas al suelo y en frecuencias hasta 30 MHz o menores. En él no se tienen en cuenta las alturas de las antenas elevadas, típicas de OUC, las cuales si están incluidas en  $R_o$ . El criterio  $R_{TP}$  puede extenderse hasta  $0.4R_o$ , cuando sea posible tomar un error de la función hasta de un 5%.

Las relaciones normalizadas en las expresiones  $g$  y  $g'$ , generaliza estas funciones de tal modo que con ellas se puede determinar fácilmente el cambio de curvatura con la distancia, o sea se pase de TP a TE y con ello se pueda cambiar las expresiones de pronóstico de la intensidad del CI (región de visibilidad). Estas características facilitan, además, el análisis del comportamiento de las AR en dependencia de los factores ( $R$  y  $h$ ), o en su lugar de los valores normalizados  $m$  y  $\zeta$ . Nótese que en las expresiones (2) y (3) -o también las (6) y (7)-, las AR dependen recurrentemente de  $R$  y  $h$ , mientras que en (30) y (31) la AR sólo depende de  $h$ . Por ejemplo ¿Cómo hallar la distancia límite  $R_v$ , donde comienza la dependencia cuadrática del campo respecto a  $R$ , si ese valor límite de  $R$  depende del producto de las AR y se necesita conocer  $R_v$  para hallar esas alturas? [3]. El valor de  $R_v$  determina el cambio que debe hacerse de la expresión completa del CI a la expresión cuadrática de Vvedensky [6] dentro de todo el rango de  $R$ .

En forma similar pueden valorarse las expresiones (22) y (23), las que pretenden determinar las AR en forma muy simple en todo el rango de distancias (o de  $\zeta$ ). Se evidencia que estas expresiones no tienen en cuenta las alturas de las antenas, por lo que el error  $\Delta R_1$  (definición en la expresión 45) que se comete es significativo, sobre todo para pequeños valores de  $m$  (observe la Fig. 5),

$$\Delta R_1 = \left| \frac{h'_{pr} - h'_{R1}}{h'_{pr}} \right| * 100 \tag{45}$$

En resumen, los resultados muestran que las expresiones alternativas (40) y (41) propuestas son válidas para cualquier distancia R, incluso cerca de Ro, y son aplicables a cualquier relación de alturas m (siempre que m sea menor que 1).

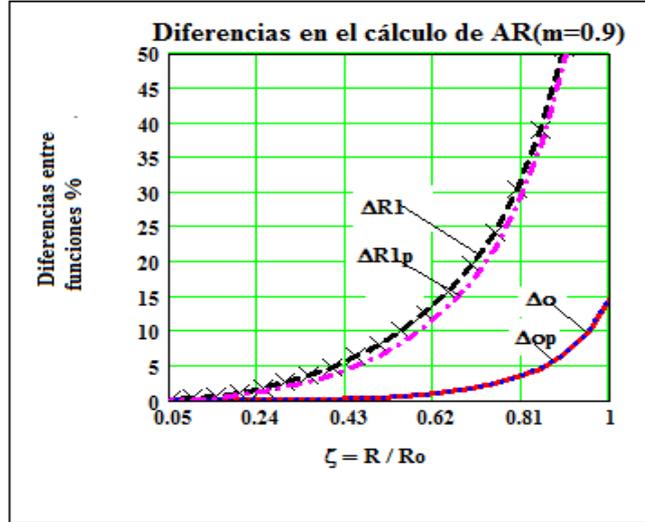


Figura 4

**Diferencias de las funciones g o g' en: TP ( $\Delta o$ ) y respecto a (22) y (23),  $\Delta_{RI}$ , al variar  $\zeta$  para m=0.9**

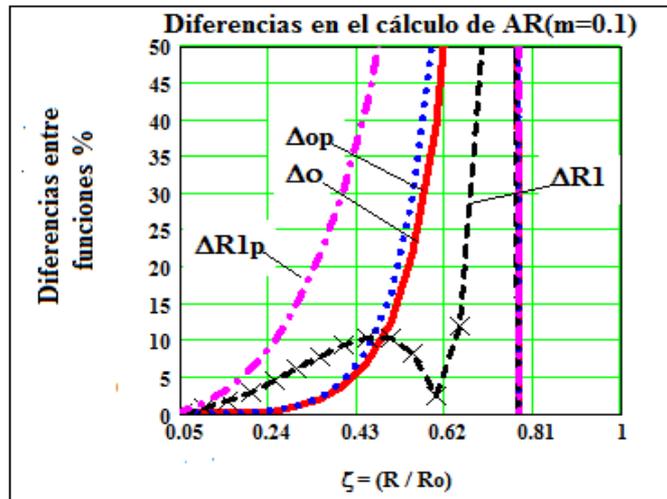


Figura 5

**Diferencias de las funciones g o g' en: TP ( $\Delta o$ ) y respecto a (22) y (23),  $\Delta_{RI}$  al variar  $\zeta$  para m=0.1**

Hay que recordar que las gráficas presentadas, y los análisis realizados, han supuesto que  $h_1 < h_2$ . Si  $h_2 < h_1$ , las expresiones (40) y (41) se intercambian, es decir g se emplea en el cálculo de  $h_2'$  y g' en el de  $h_1'$  [5,14]. De este modo la aplicación de estas expresiones o sus gráficas al cálculo de las AR sobre TE es universal.

Los experimentos realizados para áreas rurales y urbanas [9-10] y publicados han mostrado una correspondencia aceptable [24] entre los valores calculados y los medidos de la intensidad del CI en trayectos de decenas de kilómetros del servicio móvil terrestre (SMT). Como el CI está intrínsecamente ligado a la presencia de las AR en una TE lisa, a lo cual se añaden

otros factores, -algunos de ellos mencionados anteriormente-, los resultados de estas mediciones validan el resultado de los algoritmos de los pronósticos del CI que incluyen las AR. Las expresiones propuestas, además, de ser fiables facilitaron el cálculo de esos pronósticos.

## 4.- CONCLUSIONES

En el artículo se han propuesto expresiones derivadas, alternativas a las tradicionales, empleadas en el cálculo de las AR sobre una TE durante la POR. Las mismas abarcan cualquier relación  $m$  entre las alturas reales y de distancias  $\zeta$ , o sea de R respecto a  $R_o$ . Por lo expresado se puede afirmar que las expresiones derivadas propuestas y sus gráficas, tienen un uso de carácter general. Además, la generalización facilita el trabajo al realizar la evaluación o el análisis de las AR, o del CI, con ayuda de MCD; o de forma directa a través de las gráficas presentadas para análisis previos o en aplicaciones docentes. De este modo las relaciones propuestas amplían las posibilidades, respecto a las tradicionales. Por estas características las expresiones y las gráficas tienen un carácter novedoso.

En el trabajo se ha demostrado que las fórmulas de TP son aplicables sólo hasta la distancia límite  $R_{TP}$ , la cual ha quedado definida para su utilización en OUC como:  $R_{TP} = (0.3-0.4) R_o$ . Este criterio, en opinión del autor, no estaba puntualizado para la POR de antenas elevadas por lo que alcanza un carácter novedoso. Se ha comprobado que las relaciones (22) y (23), aunque más simples, son de empleo limitado, pues el error que se comete es pequeño solo para valores de  $m$  superiores a 0.7 y en un rango de distancias R inferior a  $0.3R_o$ .

De lo expresado se considera que las expresiones propuestas son una alternativa al cálculo de las AR y se cumple con los objetivos planteados en el trabajo. Se evidencia de los párrafos anteriores, el valor práctico de las expresiones y sus gráficas, estas últimas al facilitar el cálculo manual de las AR, o al emplear las expresiones como parte de la determinación del CI con ayuda de MCD, al pronosticar las zonas de cobertura de los emisores de ondas de radio de OUC del SMT, como parte del cálculo de líneas de radioenlace o del alcance de las estaciones de radiolocalización, en especial sobre el mar.

## REFERENCIAS

1. Kalinin A.I., Cherenkova EL. "Propagación de las ondas y su operación de las líneas de radio" (en ruso), Svias: Moscú; 1971: 33-42.
2. Kalinin, A.I., "Propagación de ondas de radio en líneas terrestres y cósmicas" (en ruso), Editorial "Svias", Moscú; 1979: 83-84.
3. Dolukhanov M. "Propagation of Radio Waves", Editorial Mir, Moscú; 1971: 46-56, 94-100.
4. Kerr D. "Propagation of short radio waves", Mc Graw Hill Inc., Radiation Laboratory Series, MIT, New York; 1951:34-36, 113-116.
5. Hernando J.M. "Transmisión por Radio", Ed. Universitaria Ramón Areces, Sexta edición: Madrid; 2008: 118-120.
6. Vvedensky V.A. "Propagación de las ondas de radio ultracortas" (en ruso), Nauka, Moscú; 1973: 94-97
7. Luiz A.V.; Assis M.S. "A Hybrid Prediction Model for Propagation over Irregular Terrain in the VHF and UHF Bands", IEEE Latin America Transactions; 2015; 13(9), Dec.:2830 – 2836, Electronic ISSN: 1548-0992.
8. Yang K., Molisch A.F., Ekman T., Røste T., Berbineau M. "A Round Earth Loss Model and Small-Scale Channel Properties for Open-Sea Radio Propagation", IEEE Transactions on Vehicular Technology; 2019; 68 (9), Sept. : 8449 – 8460.
9. Sandianes J.R., Stincer E.A., Benavides R.E. "Sistema computarizado para el análisis de las comunicaciones por radio", Informe presentado a la ACC en opción al Premio Anual de la ACC de 1999, Memorias de Premios Anuales de 1999, Dictamen 25 del Índice de las Sección de Ciencias Técnicas, La Habana.
10. Sandianes J.R., Benavides R.E., Simón A., Rodríguez L. "Estudio de las coberturas de dos transmisores de televisión en la banda IV de UHF", Revista de Ingeniería Electrónica, Automática y Telecomunicaciones (RIELAC), 2004; 25(1): 91-96.
11. Okumura V., Ohmpri E., Kawano T., Fukuda K. "Field strength and its variability in VHF and UHF land- mobile radio service", Review of the Electrical Communication Laboratory; 1968; 15 (9-10): 825-873, September- October.
12. UIT-R, Recomendación P-370. "Curvas de propagación en ondas métricas y decimétricas para la gama de frecuencias comprendidas entre 30 y 1 000 MHz", 2004- 2018. Suprimida en 2001
13. Kinase A., "Influence of terrain irregularities and environmental clutter surroundings on the propagation broadcasting waves in the UHF and VHF bands", NHK Technical Monograph; 1969, Marzo, Japón.
14. Collin R., "Antennas and Radiowave Propagation", Mc GrawHill Co., New York; 1985:345-352.

15. Domb C., Pryce M. “Interim Report on Propagation within and beyond the Optical Range”, *Journal of IEE*; 1947; Part III(94): 325-336.
16. Holm P.D. “On Geometric Optics Over a Spherical Earth With an Exponential Refraction Index, *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*”; 2018; 66 (12): Dec. : 6580 – 6586
17. De Minco N., “Propagation Loss Prediction Considerations for Close-In Distances and Low- Antenna Height Applications”, NTIA Report TR-07-449, US Department of Commerce, Institute for Telecommunications Sciences; 2007 (7): 22, Boulder, Colorado.
18. Fuschini F., Vitucci E.M., Barbiroli M., Falciasecca G., Degli- Espost V. “ Ray tracing propagation modeling for future small-cell and indoor applications: A review of current techniques”, *Radio Science*; 2015; 50 (6), June: 469 – 485, ISSN: 1944-799X, AGU.
19. Azpilicueta L. ; Vargas-Rosales C. ; Lopez-Iturri C. ; Aguirre E.; Falcone F.. “ Characterization of radio wave propagation in vehicular environments through deterministic methods”, *IEEE International Symposium on Antennas and Propagation & USNC/URSI National Radio Science*; 2017, San Diego, Ca,
20. Tosta R., Silva E., Arantes G. “ Waveguide Propagation Model and Measurements for Mobile Systems in Brazilian Cities, *IEEE Latin America Transactions*; 2018, 16 (2 ), Feb.: 435– 443.
21. Essaadal R., Kouki A., Gagnon F., Couillard D., Grandmaison M. E. “ Overwater point-to- multipoint radio path loss characterization and modeling”, *IEEE Wireless Communications and Networking Conference (WCNC)*, 2015 (3), IEEE Xplore
22. Eslami M., Ghorbani A. “ Predicting a Three-Dimensional Radar Coverage Area : Introducing a new method based on propagation of radio waves”, *IEEE Antennas and Propagation Magazine*; 2016, 58(1), Feb.: 28 – 34.
23. Li Y.; Liu C.; Zhong M. ; Wang Y.; Yang M. “ Radio wave propagation path loss in the irregular terrain Environments”, 3rd IEEE International Symposium on Microwave, Antenna, Propagation and EMC Technologies for Wireless Communications; 2009, October, Beijing, China; ISBN: 978-1-4244-4076-4.
24. Hernández R, Sandianes JR, Real J, Sosa R, Pérez L. “Aplicación de los métodos numéricos al estudio de la influencia del medio de propagación de las ondas de radio en Cuba”, 15 Convención de Ingeniería y Arquitectura de la CUJAE. CITELL; 2010 (11), La Habana.
25. Donohue D., Kutter J.R., “Propagation Modeling over Terrain using the Parabolic Wave Equation”, *IEEE Transaction on Antenna and Propagation*, 2000; 48(2): 177-260
26. Lytaev M.S., Vladyko A.G. “Comparative Analysis of Parabolic Equation Method and Longley–Rice Propagation Model”, 11th International Congress on Ultra Modern Telecommunications and Control Systems and Workshops (ICUMT); 2019 (October), Dublin, Ireland, IEEE Xplore: January 2020.
27. Roa B., Carin L. “A hybrid (parabolic equation)-(Gaussian beam) algorithm for wave propagation through large inhomogeneous regions, *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*; 1998, 46(5): 700 – 709.
28. Zhong X.J., Qu D.X., Ye J.D., Jin J. “Application of backward difference algorithm in radiowave prediction above earth surface “, *Proceedings of 3rd Asia-Pacific Conference on Antennas and Propagation*; 2014 (7), Harbin, China, IEEE Xplore.
29. Guo Q., Long Y. “Two-Way Parabolic Equation Method for Radio Propagation Over Rough Sea; *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*; 2020; 68(6), June: 4839 – 4847.
30. Zeng Q., Zhang W., Yang R., Jinjin L. “ Propagation loss over spherical earth surface can be predicted by uniform theory of diffraction (UTD)”; *Progress in Electromagnetic Research Symposium (PIERS)*, 2016 (9), Shanghai, China. IEEE Xplore.
31. Vavilov S.A.; Lytaev M.S. “ Modeling Equation for Multiple Knife-Edge Diffraction”, *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*; 2020; 68(5), May: 3869 – 3877.
32. Shanker Y., Lobiyal D.K. “ New approach to predict propagation path loss over flat terrains”, *International Conference on Intelligent Computing, Instrumentation and Control Technologies (ICICT)*, 2017 (7), Kannur, India, Editora IEEE.
33. Rappaport T.S., MacCartney G.R, Sun S., Yan H., Deng S., “ Small-Scale, Local Area, and Transitional Millimeter Wave Propagation for 5G Communications”, *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*; 2017 ; 65 (12), Dec.: 6474 – 6490.
34. González M.O., *Complementos de aritmética y álgebra*", Edit. Selecta, La Habana, 1955: 316-321.
35. Bronstein, *Manual de matemática para ingenieros*, Edit. MIR; Moscú.
36. Cherenkova E.L., Chernishev O.V., “Propagación de las ondas de radio”(en ruso), *Radio y Comunicaciones*, 1984, Moscú, Pag. 38.

## CONFLICTO DE INTERESES

No existe conflicto de intereses del autor con ninguna institución. Las opiniones expresadas aquí son únicamente responsabilidad del mismo

## CONTRIBUCIÓN DEL AUTOR

Su contribución consiste en la conceptualización y el desarrollo matemático previo a la propuesta presentada y el procedimiento a seguir durante la simulación. Ha realizado la revisión bibliográfica, el análisis e interpretación de los resultados obtenidos y la redacción de la presentación del artículo.

## AUTOR

José Rafael Sandianes Gálvez es Ingeniero Eléctrico, Doctor en Ciencias Técnicas, Profesor Titular del Departamento de Telemática y Telecomunicaciones en la Universidad Tecnológica de La Habana. Ha presentado trabajos en eventos nacionales e internacionales como: Informática; Fóruns de Ciencia y Técnica, en los que ha obtenido varios premios; CITTEL y otros. Obtuvo un Premio Anual de la Academia de Ciencias de Cuba en 1999. Se desenvuelve en el campo de la Electrodinámica, la Propagación de las Ondas de Radio y la Antenas. Ha sido miembro de los Consejos Científicos del ITM “José Martí” en varios períodos y miembro del Consejo Científico Ministerial en el período 2002-2004. e-mail: [sandianes@tele.cujae.edu.cu](mailto:sandianes@tele.cujae.edu.cu); [sandianes41@gmail.com](mailto:sandianes41@gmail.com); ORCID: 0000- 0003-1391-1236.



Esta revista se publica bajo una [Licencia Creative Commons Atribución-No Comercial-Sin Derivar 4.0 Internacional](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/)