

Unas notas sobre la integración numérica del proceso de remodelación ósea

Some notes on the numerical integration of bone remodeling process

Diego Alexander Garzón-Alvarado,^I Angélica María Ramírez Martínez,^{II} Dorian Luis Linero Segre^{III}

^IIngeniero Mecánico. Profesor Asociado. Departamento de Ingeniería Mecánica. Grupo de Modelado y Métodos Numéricos (GNUM). Universidad Nacional de Colombia.

^{II}Ingeniera Mecánica. Profesor Asociado. Departamento de Ingeniería Mecánica. Fundación Universidad Central de Colombia.

^{III}Ingeniero Civil. Profesor Asociado. Departamento de Ingeniería Civil y Agrícola. Universidad Nacional de Colombia.

RESUMEN

En este artículo se resuelve el problema de remodelación ósea propuesto por Weinans y otros. Para solucionar la ecuación de densidad se utilizan los métodos de Euler, Heun y Runge Kutta de cuarto orden. Para evaluar el estímulo mecánico y calcular la evolución de la densidad se utilizan dos enfoques: basado en elemento y basado en nodo. Los resultados demuestran que los métodos de Euler, Heun y Runge Kutta aproximan correctamente el problema de remodelación ósea, y, para las mallas y el paso de tiempo utilizados no existen diferencias apreciables en los patrones obtenidos. Por el contrario, el uso del enfoque basado en elemento y basado en nodo genera diferencias sustanciales en el patrón de densidad obtenido en el proceso de remodelación ósea. En el enfoque basado en elemento se encuentran discontinuidades del tipo "tablero de ajedrez" cerca de la zona de carga y columnas bien definidas lejos de esta. En el enfoque basado en nodo se observa continuidad en la distribución de densidad. Estos patrones están bien representados por los métodos de solución para la ecuación de densidad. Este estudio concluye que para los pasos de tiempo y mallas utilizados es indiferente utilizar cualquier método de integración temporal.

Palabras clave: Remodelación ósea, técnicas de integración numérica, algoritmos de remodelación ósea.

ABSTRACT

In present paper the problem of bone remodeling process proposed by Weinans et al is solved. To resolve the density equation the fourth order Euler, Heun and Runge Kutta methods are used. To assess the mechanical stimulus and to estimate density evolution two approaches are used: one based on the element and other based on node. Results showed that Euler, Heun and Runge Kutta methods move closer appropriately the bone remodeling problem, and for meshes and the passage of time used there are not significant differences in the patterns obtained. On the contrary, the use of the approach based on element and the based on node, there are lack of continuities of "chessboard" type near of charge zone and well defined columns far from it. In the approach based on node there is continuity in density distribution. These patterns are well represented by solution methods for density equation. Present study concludes that for steps of time and mesh used it doesn't matter which temporal integral method be applied.

Key words: Bone remodeling, numerical integration techniques, bone remodeling algorithms.

INTRODUCCIÓN

La estructura ósea está compuesta por huesos que le confieren estabilidad mecánica al cuerpo humano y son una fuente de minerales para el metabolismo.¹ Los huesos han sido ampliamente estudiados desde el punto de vista mecánico, mineral y por su funcionalidad.^{1,2} Desde el punto de vista mecánico se pueden adaptar a las cargas sobre las trayectorias de esfuerzo mediante la aposición mineral que se hace gracias a la acción de los osteoblastos.²⁻⁴ También se puede reabsorber el mineral cuando el estímulo mecánico es suficientemente bajo como para encontrar innecesario el mantenimiento de esta estructura.² La reabsorción está dirigida por los osteoclastos. En este sentido, los osteoblastos y osteoclastos son células primordiales en la remodelación ósea que son estimuladas por la acción de un medidor de esfuerzos mecánicos como son los osteocitos.² Cada una de estas tres células juega un papel importante en el proceso de recambio, mantenimiento y modelado de los huesos.¹

En el siglo XIX, gracias a los trabajos de Meyer, Wolff⁵ propone una teoría acerca de la arquitectura trabecular del hueso. En esta teoría se supone que sobre las trayectorias de alto esfuerzo mecánico se forma, con mayor densidad, el hueso trabecular. Ya en el siglo XX, en 1987, Frost⁶⁻⁸ propone un mecanismo de adaptación de la masa ósea en función de las cargas mecánicas. En consecuencia, a partir de la teoría de adaptación del hueso ante las cargas, se ha desarrollado un buen número de algoritmos de remodelación ósea, entre los que se destacan los propuestos por Frost,⁸ Pauwels,⁹ Kummer,¹⁰ Cowin¹¹⁻¹³ y Hegedus¹⁴ que predicen la formación de la estructura del hueso a partir de las cargas mecánicas internas que son estudiadas en términos de esfuerzos y deformaciones. Estas teorías se han estudiado mediante el uso del método de los elementos finitos² que permite obtener las variables mecánicas y estudiar la variación de la densidad de la masa ósea en el tiempo. Por tanto, las cargas mecánicas regulan la activación celular

(osteoclastos u osteoblastos) para que el hueso se adapte a las condiciones locales de carga.⁸⁻¹³

Siguiendo el modelo matemático de remodelación de Weinans y colaboradores⁴ y Nackenhorst¹⁵ la variación de la densidad en el tiempo depende del estímulo mecánico que existe en cada punto espacial del hueso, lo cual puede ser escrito como (1):

$$\frac{d\rho}{dt} = k \left(\frac{W(\rho)}{W_{ref}} - 1 \right) \quad (1)$$

Donde ρ es la densidad del tejido óseo en cada punto del espacio ($\rho(x, y, z, t)$), $W(\rho)$ es la energía-deformación por unidad de volumen que se debe a las cargas mecánicas, k es una constante y W_{REF} es la energía-deformación (por unidad de volumen) de referencia que establece el umbral para el cual se llevará a cabo un proceso de aposición ($W(\rho)/W_{ref} > 1$) o reabsorción ($W(\rho)/W_{ref} < 1$) del tejido.¹⁵ Cabe anotar que la energía-deformación depende de la densidad y está dada por (2):

$$W(\rho) = \frac{1}{2\rho} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{C}(\rho) \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2)$$

Donde $\boldsymbol{\varepsilon}$ es la deformación en notación Voigt del tensor de deformación dado por

$\boldsymbol{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$, y $\mathbf{C}(\rho)$ es la matriz de elasticidad lineal. La matriz $\mathbf{C}(\rho)$ contiene el módulo de Poisson que, en general, se considera constante y el módulo de Young que depende de la densidad.⁴ (3):

$$E(\rho) = A\rho^n \quad (3)$$

Donde A es una constante y n establece una relación de potencia de la densidad, que se ha hallado mediante evidencias experimentales.

Utilizando las ecuaciones (1), (2) y (3) y mediante la solución a la ecuación de *momentum* se ha simulado la aparición de la arquitectura del hueso trabecular sometido a cargas mecánicas. Estas simulaciones han presentado dos características esenciales: en primer lugar, cerca de la zona de aplicación de carga se han observado patrones de tablero de ajedrez que determinan la saturación o reabsorción del proceso de remodelado.¹⁶ En segundo lugar, lejos de la zona de carga se ha detectado la formación de "columnas" que representan regiones de hueso compacto.^{16,17} Diversos autores consideran que la zona de hueso compacto, o zona columnar, es una buena representación fisiológica de la formación de hueso compacto.¹⁸ Por el contrario, la zona cercana a las cargas se presenta como una discontinuidad asociada al método de los elementos finitos.¹⁶

Por tanto, para sortear estos problemas de discontinuidad se han utilizado diferentes enfoques para resolver el problema de remodelación ósea. Jacobs y otros,¹⁶ por ejemplo, utilizaron el método convencional de elementos finitos en el

cual se calcula la densidad en cada punto de integración de Gauss, el cual se denominó proceso de remodelación "basado en elemento". Este método tiene una buena aproximación y excelentes resultados. Para integrar la ecuación de densidad se utilizó el método de Euler hacia adelante.¹⁶ Uno de los principales problemas de este enfoque es la formación de discontinuidades en el límite de cada elemento, similar a lo que ocurre con los esfuerzos. Para solucionar este problema, Jacobs y otros¹⁶ proponen un enfoque "basado en nodo", donde el estímulo de esfuerzo es proyectado en los nodos y allí se calcula la densidad utilizando, nuevamente, el método de Euler hacia adelante.

Como se observa, el método de Euler hacia adelante ha sido ampliamente utilizado para integrar la densidad en el tiempo. En 2007, Chen y otros¹⁷ utilizan el método de Adams-Bashforth para integrar la ecuación de densidad, en aquel artículo concluyen que este método numérico aumenta la precisión de la integración temporal con bajo costo computacional. Desde esta perspectiva, el objetivo de este artículo es comparar tres métodos de integración temporal: el método de Euler (primer orden), de Heun (segundo orden), y Runge Kutta de cuarto orden.¹⁸ Para ello, se han utilizado dos enfoques: "basado en elemento" y "basado en nodo".¹⁶ El primer objetivo es comparar los patrones obtenidos gracias a cada uno de los métodos de integración temporal; el segundo objetivo es comparar los diferentes enfoques para la solución de la ecuación de densidad: el método basado en nodo y el basado en elemento.

Los resultados aquí presentados permiten concluir que los patrones de densidad obtenidos con cada uno de los métodos difieren en su forma, en especial, en la formación del número de "columnas" de hueso compacto y la formación del tablero de ajedrez en cada enfoque. Por tanto, los resultados son útiles para futuras investigaciones en remodelación ósea que permitan elucidar el mejor método de integración temporal, a la luz de la comparación con la evidencia radiográfica de huesos tan ampliamente estudiados como el fémur.

MÉTODOS

En esta sección se presenta cada uno de los métodos utilizados para la integración temporal de la densidad y la formulación del problema elástico. En primer lugar se manipulará la ecuación (3) para obtener una forma adimensional y más sencilla de trabajar para el módulo de elasticidad. Multiplicando el lado derecho de (3)

por (ρ_0^n / ρ_0^n) se tiene (4):

$$E(\rho) = A\rho_0^n \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^n = E_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^n = E_0 \lambda^n \quad (4)$$

Donde $E_0 = A\rho_0^n$ y $\lambda = \rho / \rho_0$ son el módulo de elasticidad y la relación de densidades adimensional, respectivamente. Por tanto la matriz de elasticidad lineal se puede expresar como (5):

$$\mathbf{C}(\rho) = \lambda^n \mathbf{C}_0 \quad (5)$$

Donde \mathbf{C}_0 es la matriz de elasticidad lineal con coeficientes constantes, que depende de E_0 y ν , únicamente. De igual forma, la energía-deformación por unidad de volumen (2) se puede expresar como (6):

$$W(\rho) = \frac{1}{2\rho} \lambda^n \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{C}_0 \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\lambda^n}{\rho} \left(\frac{\boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{C}_0 \boldsymbol{\varepsilon}}{2} \right) = \frac{\lambda^n}{\rho} \bar{U} \quad (6)$$

Donde \bar{U} es la energía-deformación en cada instante del tiempo, que se calcula, únicamente, con las constantes iniciales del problema de remodelación.¹⁵ Reemplazando estas ecuaciones en (1) y llevando a la forma adimensional el término de derivada temporal y con alguna manipulación algebraica se tiene (7):

$$\frac{d\lambda}{dt} = k\rho_0 \left(\frac{\rho_0}{\rho} \frac{\lambda^n \bar{U}}{\rho_0 W_{ref}} - 1 \right) = k\rho_0 \left(\left(\frac{\rho_0}{\rho} \right) \frac{\lambda^n \bar{U}}{\rho_0 W_{ref}} - 1 \right) = k\rho_0 \left(\lambda^{n-1} \frac{\bar{U}}{\rho_0 W_{ref}} - 1 \right) \quad (7)$$

Si se define que $U_{ref} = \rho_0 W_{ref}$ y $k_1 = k\rho_0$ se tiene la siguiente ecuación para la relación de densidades (8):

$$\frac{d\lambda}{dt} = k_1 \left(\lambda^{n-1} \frac{\bar{U}}{U_{ref}} - 1 \right) \quad (8)$$

De otro lado, Oñate¹⁹ menciona la ecuación de *momentum* que establece los esfuerzos internos de un cuerpo (9):

$$\nabla \bullet \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad (9)$$

Donde el esfuerzo está dado por (10):

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}(\rho) \boldsymbol{\varepsilon} = \lambda^n \mathbf{C}_0 \boldsymbol{\varepsilon} \quad (10)$$

Solución por el método de los elementos finitos

Para solucionar la ecuación (9) se lleva su forma diferencial a la forma débil,¹⁹ por lo que se obtiene (11):

$$\int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\varepsilon} \lambda^n \mathbf{C}_0 \boldsymbol{\varepsilon} d\Omega + \int_{\Omega} \delta \mathbf{u} \bullet \mathbf{b} d\Omega - \int_{\Gamma} \delta \mathbf{u} \bullet \mathbf{t} d\Gamma = 0 \quad (11)$$

Donde $\delta\varepsilon$ y δu son funciones de ponderación y $\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$ son las tracciones en el contorno Γ que sirve de frontera para el dominio Ω (Fig. 1).

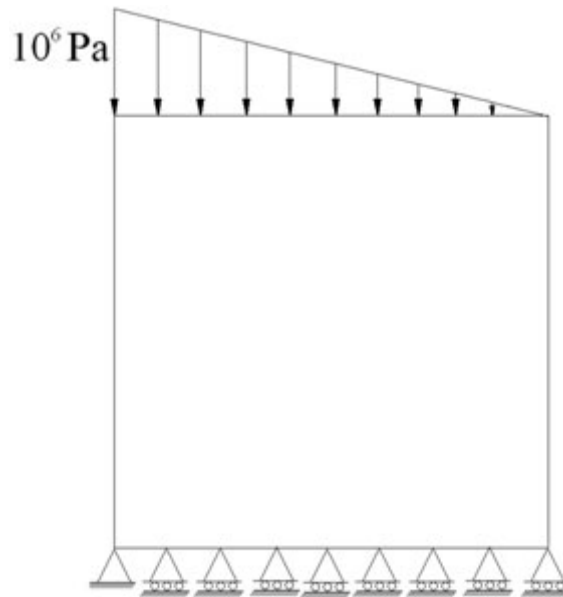


Fig. 1. Condiciones de contorno del problema de remodelación ósea.

Para hacer el cálculo de la solución aproximada mediante la discretización por elementos finitos, el campo de desplazamientos¹⁹ se aproxima (12):

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{N}^T(\mathbf{x})\mathbf{u}(t) \quad (12)$$

Donde $\mathbf{N}^T(\mathbf{x})$ es un vector fila que contiene las funciones de forma que sirven para aproximar el desplazamiento $\mathbf{u}(t)$.¹⁹ Utilizando el método de Galerkin, se aproximan las funciones de ponderación de la misma forma que el campo de desplazamientos¹⁹ por lo que se obtiene, a nivel elemental, la siguiente ecuación (13):

$$\left(\int_{\Omega^e} \mathbf{B} \lambda^n \mathbf{C}_0 \mathbf{B}^T d\Omega^e \right) \mathbf{u} + \int_{\Omega^e} \mathbf{N} \mathbf{b} d\Omega^e + B.C. = 0 \quad (13)$$

Donde \mathbf{B} es el operador de derivadas que convierte los desplazamientos en deformaciones.¹⁹ Este sistema de ecuaciones está completo al aplicar las condiciones de Neumann y Dirichlet adecuadas para resolver el problema elástico.

Solución de la ecuación de densidad relativa

En este artículo se soluciona la ecuación de densidad adimensional (o relativa) mediante la integración de la ecuación (8) por tres métodos diferentes: Euler, Heun y Runge Kutta. Para este objetivo se define (14):

$$\frac{d\lambda}{dt} = f(\mathbf{x}, t_k, \lambda) = k_1 \left(\lambda^{n-1} \frac{\bar{U}}{U_{ref}} - 1 \right) \quad (14)$$

Por tanto, se define el método de Euler hacia delante¹⁸ como (15):

$$\lambda_{k+1} = \lambda_k + \Delta t f(\mathbf{x}, t_k, \lambda_k) \quad (15)$$

Donde $\Delta t = t_{k+1} - t_k$ es el intervalo de tiempo de integración y k hace referencia a la evaluación de la variable λ en un tiempo específico, esto es: $\lambda_k = \lambda(\mathbf{x}, t_k)$. Este método se ha utilizado ampliamente en el proceso de predicción de densidad ósea por remodelación.²⁰ El método de Euler hacia adelante es de primer orden y tiene el inconveniente de ser inestable para intervalos de tiempo de gran tamaño.¹⁸

También se utilizó el método de Heun,¹⁸ dado por (16):

$$p_{k+1} = \lambda_k + \Delta t f(\mathbf{x}, t_k, \lambda_k)$$

$$\lambda_{k+1} = \lambda_k + \frac{\Delta t}{2} [f(\mathbf{x}, t_k, \lambda_k) + f(\mathbf{x}, t_k, p_{k+1})] \quad (16)$$

Donde P_{k+1} se calcula como en el caso de Euler y sirve como predictor del nuevo valor. Luego de calcular este último valor λ_{k+1} se utiliza la regla del trapecio para hacer una corrección y obtener el valor definitivo del intervalo de tiempo.

Por último se introduce el método de Runge-Kutta de orden 4 (RK4).¹⁸ Este método se basa en el método de Taylor (de expansión en series de Taylor), y se evita la evaluación de cada una de las derivadas parciales, pero a cambio se evalúa la función en varios puntos del intervalo en donde se resuelve la ecuación diferencial. En general, el método de Runge Kutta de cuarto orden es el más popular, se utiliza para propósitos generales y es fácil de programar.¹⁸ Expertos en el tema de ecuaciones diferenciales han declarado que la utilización de métodos de orden superior al de RK4 aumenta el costo computacional.¹⁸ Por tanto, la densidad relativa se puede evaluar mediante la siguiente regla (17):

$$\lambda_{k+1} = \lambda_k + \frac{\Delta t}{6} [f_1 + 2f_2 + 2f_3 + f_4] \quad (17)$$

Donde cada una de las funciones está dada por (18):

$$\begin{aligned}
 f_1 &= f(\mathbf{x}, t_k, \lambda_k) \\
 f_2 &= f\left(\mathbf{x}, t_k + \frac{\Delta t}{2}, \lambda_k + \frac{\Delta t}{2} f_1\right) \\
 f_3 &= f\left(\mathbf{x}, t_k + \frac{\Delta t}{2}, \lambda_k + \frac{\Delta t}{2} f_2\right) \quad (18) \\
 f_2 &= f(\mathbf{x}, t_k + \Delta t, \lambda_k + \Delta t f_3)
 \end{aligned}$$

Los métodos de Euler, Heun y RK4 han sido implementados en FORTRAN y se han acoplado con el problema elástico. El objetivo es comparar la eficiencia de cada uno de los métodos y los patrones obtenidos en cada caso. Para la implementación se han utilizado tres enfoques primordialmente: Enfoque basado en elemento (sobre puntos de Gauss),¹⁵ enfoque basado en elemento (con promedio elemental)^{15,16} y basado en nodo.¹⁶ A continuación se discute cada uno de los métodos de solución empleados.

Solución mediante el enfoque basado en elemento y basado en nodo

Para la solución del problema de remodelación ósea se utilizan los enfoques basados en elemento y en nodo. En el caso del enfoque basado en elemento se utilizaron dos procedimientos: en el primero, se almacenan los esfuerzos y deformaciones a nivel elemental por lo que se obtiene un solo valor "promedio" por cada elemento que sirve para obtener la densidad relativa en el nuevo paso de tiempo. En segundo lugar, se obtienen los esfuerzos y deformaciones en cada punto de Gauss. En este punto se calcula el nuevo valor de la densidad.

En el enfoque nodal se calculan los esfuerzos y deformaciones a nivel elemental, los cuales se "proyectan" a cada uno de los nodos de la malla. Una vez en los nodos se calcula la densidad en el nuevo paso de tiempo.^{16,17}

A continuación se desarrollan varios ejemplos numéricos que permiten observar los patrones obtenidos con cada uno de los métodos de integración y con cada tipo de aproximación para solucionar la densidad.

Modelo computacional

El ejemplo computacional a resolver es una placa cuadrada de 1x1 m con carga no uniforme en la parte superior y restricciones de movimiento en dirección vertical en la parte inferior ([fig. 1](#)). Este ejemplo ha sido ampliamente estudiado en casos de ensayos numéricos sobre algoritmos de remodelación ósea.¹⁶⁻²⁰ Los parámetros para la simulación se pueden observar en la [tabla](#).

Tabla. Parámetros utilizados en la simulación

E_0	ν	n	U_{Ref}	k_1
$64(10^6)$ Pa	0.3	2	800.0 Pa	$3.125(10^{-1})$ days ⁻¹

Para estos valores se ha construido una malla de 40x40 elementos en dirección horizontal y vertical (Fig. 2) respectivamente, y se ha integrado con dos pasos de tiempo $\Delta t = 0.100$ y 0.500 . El tiempo total de simulación es 100. La condición inicial es $\lambda = 1.0$ y los límites utilizados en el algoritmo de remodelación ósea son $0.0125 \leq \lambda \leq 2.175$.

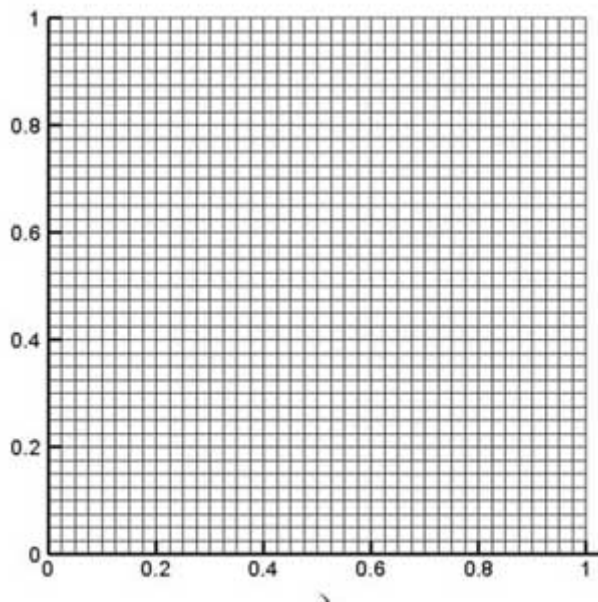


Fig. 2. Mallas utilizadas en cada ejemplo.

La malla fue hecha con elementos cuadriláteros bilineales y se utilizaron cuatro puntos de Gauss de integración.¹⁹

RESULTADOS

En la [figura 3](#) se muestran los resultados para el valor de densidad relativa λ utilizando un enfoque basado en elemento con promedio a nivel elemental del estímulo y la densidad. En negro se representa el valor máximo de densidad (2.175) y en blanco, el valor mínimo (0.0125). Se observa que para $h = 0.025$ y $\Delta t = 0.1$ el patrón que se obtiene es similar para los tres tipos de métodos de solución de la ecuación de densidad. Se observa que cerca de la zona de imposición de la carga se tiene una distribución de densidad similar a un tablero de ajedrez y lejos de la zona de carga se muestra la formación de tres columnas bien definidas que recuerdan el hueso cortical.

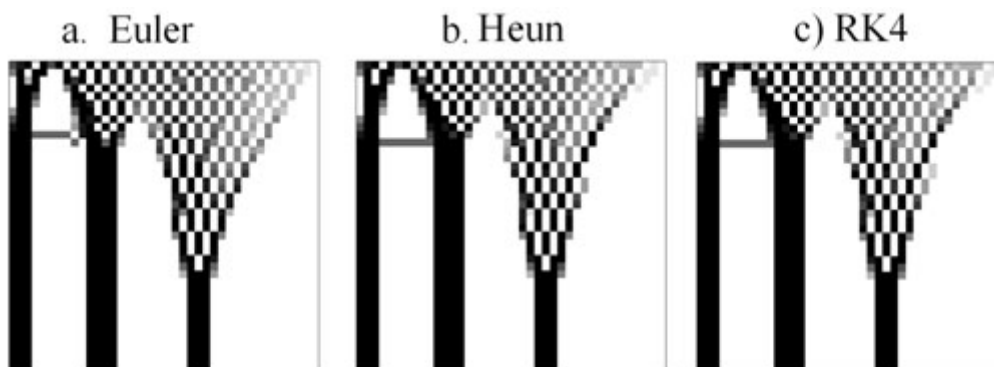


Fig. 3. Resultados obtenidos para el proceso de remodelación ósea descrito en el texto, utilizando un enfoque basado en elemento. El valor del estímulo y la densidad se obtiene mediante el promedio elemental.

Al igual que en el caso anterior, en la [figura 4](#) se muestran los resultados para el enfoque basado en elemento, donde el estímulo mecánico y la densidad se calculan en cada uno de los cuatro puntos de Gauss. Con el propósito de graficar los valores obtenidos se llevó a cabo un promedio ("proyección") de la densidad en cada uno de los puntos nodales. Al igual que en el caso anterior, se observa la formación de tres columnas bien definidas de alta densidad y un patrón en tablero de ajedrez con zonas continuas que simulan el hueso trabecular. La distribución de densidad se observa más continua en la zona central que une la segunda y tercera columnas y se notan dos o tres vigas horizontales que unen la primera y segunda columnas. Los resultados obtenidos son similares para los tres tipos de métodos de solución.

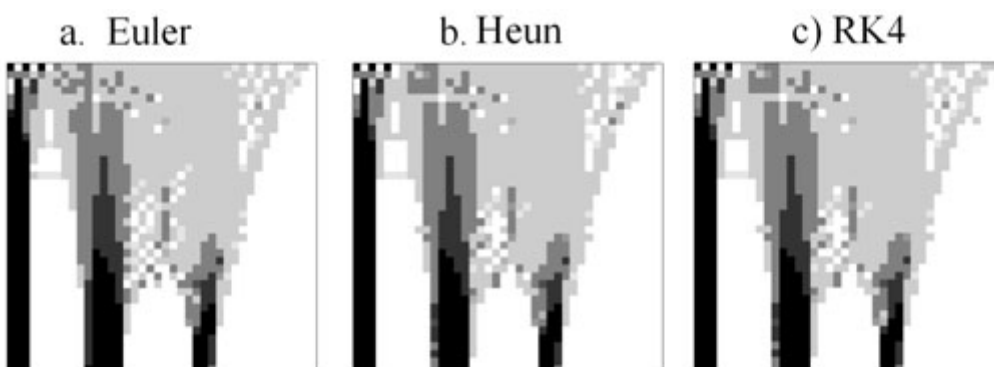


Fig. 4. Resultados obtenidos para el proceso de remodelación ósea descrito en el texto, utilizando un enfoque basado en elemento. El valor del estímulo y la densidad se obtiene en cada uno de los puntos de Gauss.

En la [figura 5](#) se muestran los resultados obtenidos utilizando el enfoque basado en nodo. En este caso los estímulos son calculados a nivel elemental y "proyectados" a los nodos donde se calcula cada uno de los nuevos valores de la densidad relativa. En este procedimiento se observan sustanciales diferencias entre los patrones obtenidos y los previamente simulados. En primer lugar, se observa que no se presentan patrones tipo tablero de ajedrez cercanos a la carga, por el contrario, se muestra un patrón de densidad continua que transita desde valores bajos en la parte superior (hueso trabecular) y va hacia zonas de alta densidad en la parte inferior, que emula el hueso cortical.

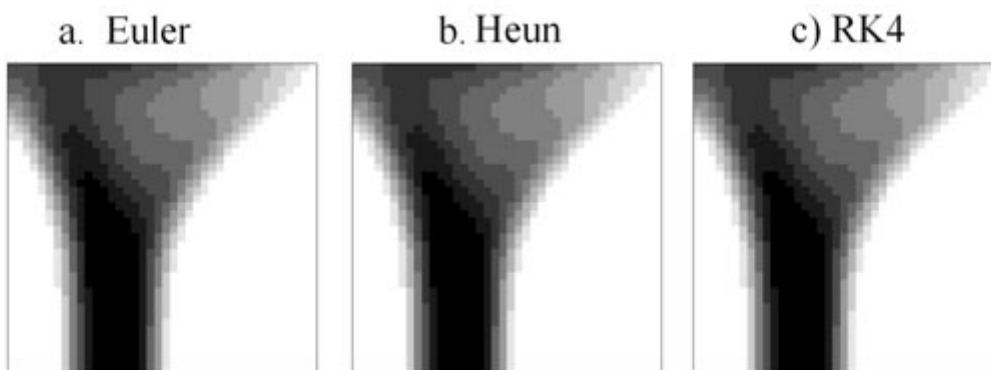


Fig. 5. Resultados obtenidos para el proceso de remodelación ósea descrito en el texto, utilizando un enfoque basado en nodo. El valor del estímulo y la densidad se obtiene en cada uno de los puntos de los nodos de la malla mediante la proyección de los valores elementales.

DISCUSIÓN

En este artículo se desarrollan varios ejemplos numéricos sobre el problema de remodelación ósea de la placa con carga distribuida, ampliamente referenciado en diversos trabajos. Para probar los diferentes esquemas para la solución de la densidad, se han utilizado los métodos de Euler, Heun y Runge Kutta. Por tanto, se aproxima la densidad con métodos de primero, segundo y cuarto orden. Para calcular el estímulo mecánico de remodelación y calcular la evolución de la densidad se utilizan dos enfoques, el basado en elemento y el basado en nodo. Este artículo es pionero en utilizar y comparar diferentes enfoques de solución de la ecuación de densidad.

Para implementar el algoritmo matemático expuesto por Nackenhorst,¹⁵ se llevó la densidad a su forma adimensional, lo cual permite obtener el parámetro λ , que afecta la ecuación constitutiva de esfuerzo-deformación. Utilizando esta formulación se facilita la implementación numérica gracias a que la energía de deformación (o estímulo mecánico) a calcular queda en términos, únicamente, de los valores del módulo de elasticidad y de Poisson de referencia, multiplicada por la densidad relativa, lo que permite separar el cálculo y almacenar cada variable según la conveniencia.

Los resultados muestran, al igual que en artículos previos, la formación de la zona columnar (de alta densidad) en la zona lejana a la carga y la zona trabecular (de baja densidad), en la parte cercana.¹⁷ Los resultados son similares a los obtenidos por Weinans y otros,⁴ Fernández y otros²¹ y Chen y otros.¹⁷ Sin embargo, la formulación matemática difiere por el manejo de la densidad relativa que se realiza aquí.

En el enfoque basado en elemento (con promedio elemental y en cada punto de Gauss) se observa un patrón de tablero de ajedrez cerca de la zona de carga, lo cual se elimina con el enfoque basado en nodo. De otro lado, al igual que muestra Chen,¹⁷ los resultados basados en nodo y en elemento difieren en el patrón obtenido. En el caso elemental se obtienen tres columnas en la parte inferior, y una zona de baja densidad en la superior. A diferencia de estos resultados, para el enfoque basado en nodo, se obtienen dos columnas en la parte inferior y una zona continua, de baja densidad, cercana a la carga. En el caso del enfoque nodal se tiene, además, diferencias debido al tamaño de paso de tiempo y de cada uno de los elementos. El efecto de la continuidad en la densidad y la diferencia en los

patrones obtenidos se puede deber a la influencia del tamaño de la malla y la proyección de los estímulos a cada uno de los nodos. De esta forma se pueden obtener una o dos columnas en la parte inferior, que, sin embargo, siguen un patrón, en cuanto a la ubicación de las columnas y la forma de la zona trabecular, cercano al obtenido con el enfoque basado en elemento.

De otro lado, con todos los métodos de solución del problema de la densidad relativa se obtienen resultados similares entre si. Es decir, con el uso de los métodos de Euler, Heun y Runge-Kutta se obtienen resultados similares que no establecen diferencias apreciables que promuevan el uso de uno u otro. Sin embargo se debe mencionar que uno de los problemas de utilizar un enfoque de primer orden es el tamaño de paso de tiempo. A diferencia de este, el método de Runge Kutta de cuarto orden da buenos resultados, aun para pasos de tiempo de gran longitud. Aunque esto no se ha probado aquí, será resuelto en un segundo artículo sobre este tema.

Por tanto, en conclusión, no hay diferencias apreciables en el esquema de solución numérica para el paso de tiempo utilizado en este artículo.

Diferencias apreciables se observan entre los patrones obtenidos bajo el enfoque basado en nodo y el basado en elemento. Este trabajo confirma estas diferencias entre los patrones y abre paso a futuras investigaciones sobre el tamaño de paso que debe ser utilizado con cada uno de los métodos de solución.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. Ganong WF. Fisiología médica. 20ma. edición. México: Editorial Manual Moderno; 2006.
2. Cowin S. Bone Mechanics Handbook. Second Edition. USA: CRC Press; 2001.
3. Jacobs C, Simo JC, Beaupré GS, Carter DR. Adaptive Bone Remodeling Incorporating simultaneous density and anisotropy considerations. *Journal of Biomechanics*. 1997; 30(6):603-13.
4. Weinans H, Huiskes R, Grootenboer R. The Behavior of adaptive bone remodeling simulation models. *Journal of Biomechanics*. 1992; 25(12):1425-41.
5. Wolff J. Das Gesetz der Transformation der Knochen. Berlin: Ediciones Hirschwald; 1892.
6. Frost HM. The laws of bone structure. Springfield, IL., USA: Editorial Charles C. Thomas; 1964.
7. Frost HM. Mathematical elements of Lamellar Bone Remodeling. Springfield, IL. USA: Editorial Charles C. Thomas; 1964.
8. Frost HM. Vital Biomechanics. Proposed general concepts for skeletal adaptations to mechanical usage. *Calcif Tissue Int*. 1987; 42: 145-56.
9. Pauwels F. Gesammelte Abhandlungen zur Funktionellen Anatomie des Bewegungsapparates, Berlin: Springer; 1965.

10. Kummer BKF. Biomechanics of bone mechanical properties, functional structure, functional adaptation. En: Biomechanics: Its foundation and objectives. Edited by Fung YC, Perrone N, Anliker M, New Jersey, USA: Editorial Prentice Hall, Englewood Cliffs; 1972. p. 237-71.
11. Cowin SC. Wolff's law of trabecular architecture at remodeling equilibrium. J Biomechanics Engineering. 1986;108:83-8.
12. Cowin SC, Hegedus DH. Bone remodeling I: A theory of adaptive elasticity. J Elasticity. 1976;6:313-26.
- 13] Cowin SC, Nachlinger RR. Bone remodeling III: uniqueness and stability in adaptive elasticity theory. J Elasticity. 1978;8:285-95.
- 14] Hegedus DH, Cowin SC. Bone remodeling II: small strain adaptive elasticity. J Elasticity. 1976;6:337-52.
15. Nackenhorst U. Numerical Simulation of Stress Stimulated Bone Remodeling. Technische Mechanik. 1997; 17(1):31-40.
16. Jacobs CR, Levenston ME, Beaupré GS, Simó JC Carter DR. Numerical Instabilities in bone remodeling simulations: The advantages of a node-based finite element approach. Journal of Biomechanics. 1995; 28:449-59.
17. Chen G, Pettet G, Pearcy M, McElwain DLS. Comparison of two numerical approaches for bone remodelling. Medical Engineering and Physics. 2007; 29:134-39.
18. Hoffman JD. Numerical Methods for Engineers and Scientists, 2nd ed. New York: Mc Graw-Hill; 1992.
19. Oñate E. Structural Analysis with the Finite Element Method. Linear Statics: Volume 1: Basis and Solids. Barcelona, España: Springer; 2009.
20. Beaupre G, Orr T, Carter DR. An approach for time dependent bone modeling and remodeling-Theoretical Development. J Orthopedic Research. 1990;8:651-61.
21. Fernández JR, García-Aznar JM, Martínez R, Viaño J. Numerical analysis of a strain-adaptive bone remodelling problem. Comput Methods Appl Mech Engrg. 2010;199:1549-57.

Recibido: 30 de agosto 2010.

Aprobado: 15 de septiembre 2010.

Ing. Diego Alexander Garzón-Alvarado. Grupo de Modelado y Métodos Numéricos (GNUM). Universidad Nacional de Colombia.