

## Modelo de endurecimiento isotrópico con esquema de integración explícita para biomateriales y su aplicación a la expansión de *stents*

### Isotropic hardening model with explicit integration scheme for biomaterial and its application to stents expansion

Carlos Alberto Narváez-Tovar,<sup>I</sup> Oscar Rodrigo López-Vaca,<sup>I</sup> Diego Alexander Garzón-Alvarado<sup>II</sup>

<sup>I</sup>Máster en Ciencias. Ingeniero Mecánico. Profesor. Facultad de Ingeniería Mecánica, Universidad Santo Tomás. Bogotá, Colombia.

<sup>II</sup>Ingeniero Mecánico, PhD. Profesor Asociado. Departamento de Ingeniería Mecánica y Mecatrónica. Universidad Nacional de Colombia. Bogotá, Colombia.

---

#### RESUMEN

Se presenta un modelo de endurecimiento isotrópico para biomateriales metálicos, el cual emplea un esquema de integración explícita bajo una formulación incremental. Para la implementación computacional se programó un elemento finito de usuario UEL en lenguaje FORTRAN para su ejecución en el software ABAQUS. Con el fin de validar el modelo se resuelven dos ejemplos tipo *benchmark* y sus resultados son comparados con ANSYS y el UMAT de Dunne y Petrinic para ABAQUS. Finalmente, el modelo es usado para simular la extensión de un *stent* coronario fabricado en acero inoxidable 316L. Se concluye que el modelo posee un error numérico aceptable teniendo en cuenta que el elemento finito fue programado por completo y no posee ninguna de las optimizaciones de los códigos comerciales. En trabajos futuros el UEL será acoplado con modelos de mecánica de daño continuo para la predicción de la falla por fatiga, cuyo análisis es un estándar básico en la manufactura de *stents*.

**Palabras clave:** Elementos finitos, biomateriales metálicos, endurecimiento isotrópico lineal, integración implícita y explícita, modelos de plasticidad.

---

## ABSTRACT

A isotropic hardening model is presented for metallic biomaterials, which uses a explicit integration scheme under increasing formula. To computer implementation a finite element from UEL user was programmed in FORTRAN language for its execution in the ABAQUS software. To model validation two examples type benchmark were solved and results are compared with ANSYS and the UMAT of Dunne and Petrinic for ABAQUS. Finally, model is used to simulate the extension of a coronary stent manufactures in 316L stainless steel. We conclude that the model has an acceptable numerical error taking into account that finite element was programmed as a whole and has not any of the optimizations of commercial codes. In future papers the UEL will be coupled with continuous damage mechanics model to predict the failure due to fatigue, whose analysis is a basic standard in stent manufacturing.

**Key words:** Finite elements, metallic biomaterials, linear isotropic hardening, implicit and explicit integration, plasticity models.

---

## INTRODUCCIÓN

En las últimas décadas ha crecido el interés por predecir con exactitud el comportamiento no lineal de los materiales.<sup>1</sup> Específicamente, el comportamiento plástico de los biomateriales metálicos es de gran importancia para diversos sectores de la industria que los emplean en la fabricación de diversos dispositivos como prótesis e implantes, ya que los modelos computacionales pueden reemplazar a los métodos experimentales usados en el proceso de diseño, los cuales son costosos y demandan tiempo.<sup>2</sup> Sin embargo, la exactitud de estos modelos depende de la relación existente entre los esfuerzos y deformaciones empleadas y de la correcta identificación de los parámetros del material, haciendo entonces que las ecuaciones constitutivas sean el elemento esencial de cualquier cálculo estructural.<sup>3</sup>

El comportamiento plástico del biomaterial metálico es importante en el diseño de implantes intravasculares o *stents*.<sup>4</sup> Un *stent* es una estructura tubular con apariencia de malla de alambre, diseñada para actuar como soporte de las paredes de una arteria.<sup>5</sup> Este dispositivo es frecuentemente usado en la angioplastia, de forma tal que una vez posicionado correctamente dentro de la arteria obstruida, el *stent* se expande y comprime la placa contra la pared de la arteria.<sup>6</sup> Una vez que se alcanza el diámetro de expansión requerido, el *stent* deformado plásticamente permanece en la arteria para mantenerla abierta y restaurar el flujo de sangre.<sup>7</sup> Muchos *stents* se fabrican actualmente en el mundo, aunque difieren en las técnicas de manufactura, las formas, el material y la técnica de expansión.<sup>4</sup> Existen dos tipos de implantes intravasculares basados en dos principios básicos de expansión: los *stents* expandibles por globo, fabricados en acero inoxidable 316L, y los *stents* autoexpandibles, que emplean aleaciones de memoria de forma.<sup>8</sup> Se han desarrollado diversas investigaciones con el propósito de optimizar el material y la geometría,<sup>9,10</sup> incrementar la flexibilidad<sup>11,12</sup> y disminuir el contacto superficial con las paredes de la arteria.<sup>13,14</sup> Dadas las limitaciones para investigar la interacción del *stent* con la arteria *in vivo*, es importante modelar computacionalmente el comportamiento del implante.<sup>4</sup>

---

El objetivo principal de este artículo es desarrollar un modelo de plasticidad con endurecimiento isotrópico con esquema de integración numérica explícita para biomateriales metálicos. Para la implementación computacional se deduce una matriz de rigidez tangente que establece la relación entre los diferenciales del esfuerzo y la deformación, permitiendo una formulación incremental que es solucionada empleando el método de Newton-Raphson. El modelo propuesto es implementado en ABAQUS mediante un elemento de usuario UEL creado en lenguaje FORTRAN.

En el artículo se emplea la notación siguiente: los tensores se denotan con caracteres en negrilla y cursiva y sus órdenes se indican en el texto. Las matrices se denotan con caracteres en negrilla y mayúscula, mientras que los vectores, en negrilla y minúscula. Las siguientes operaciones simbólicas aplican:  $a:b = a_{ij}b_{ij}$  y  $a \cdot b = a_i b_i$ , con sumatoria sobre el índice repetido.

## MÉTODOS

En general, la gran mayoría de metales se endurecen cuando se deforman plásticamente, es decir, para continuar deformándolos plásticamente luego de alcanzar la superficie de fluencia inicial el nivel esfuerzo se incrementa en función de la deformación plástica acumulada  $p$ , la cual puede calcularse como

$$p = \int dp = \int \dot{p} dt \quad (1)$$

siendo  $\dot{p}$  la tasa de deformación plástica efectiva y  $dp$  el incremento en la deformación plástica efectiva, el cual puede calcularse como

$$dp = \left( \frac{2}{3} d\boldsymbol{\epsilon}^p : d\boldsymbol{\epsilon}^p \right)^{1/2} \quad (2)$$

Luego de la deformación plástica inicial la superficie de fluencia debe expandirse debido a la condición de consistencia<sup>15</sup> haciendo que las superficies subsecuentes dependan de alguna forma de la deformación plástica.<sup>16</sup> Cuando la expansión de la superficie es uniforme en todas las direcciones, se afirma que el endurecimiento es isotrópico.

### Endurecimiento isotrópico lineal

En general, la superficie de fluencia para un material con plasticidad J2 con endurecimiento isotrópico puede definirse como

$$f(\boldsymbol{\sigma}, p) = \sigma_e - \sigma_y(p) = 0 \quad (3)$$

donde  $\sigma_e$  es el esfuerzo equivalente de Von Mises y  $\sigma_y(p)$  es la función de esfuerzo de fluencia, la cual puede escribirse de la forma

$$\sigma_y(p) = \sigma_{y0} + r(p) \quad (4)$$

siendo  $\sigma_{y0}$  el esfuerzo de fluencia inicial y  $r(p)$  es la función de endurecimiento.

Para el caso del endurecimiento isotrópico lineal, la función de endurecimiento se define bajo la siguiente forma diferencial

$$d r = h d p \quad (5)$$

donde  $h$  es la tasa de endurecimiento. Para una condición de carga uniaxial a tensión, se considera que el modelo del material es bilineal pues posee una recta elástica cuya pendiente es el módulo de elasticidad y a una recta plástica con un módulo tangente que depende tanto del módulo de elasticidad como de la tasa de endurecimiento. Los modelos bilineales son ideales para representar materiales cuya curva plástica es muy aplanada.<sup>17</sup> En el modelado computacional de biomateriales metálicos, el acero inoxidable 316L es considerado frecuentemente como bilineal.<sup>13</sup>

### Regla de flujo y multiplicador plástico

A partir del instante en que inicia la deformación plástica se origina un flujo plástico en el material. La hipótesis de normalidad afirma que la dirección del flujo es normal a la tangente de la superficie de fluencia en el punto de carga. Lo anterior implica que el incremento de la deformación plástica  $d\varepsilon^p$  está definido por

$$d\varepsilon^p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma} \quad (6)$$

donde  $\sigma$  es el tensor de esfuerzo y  $d\lambda$  es el multiplicador plástico, el cual define la magnitud de  $d\varepsilon^p$ . Para un material con plasticidad J2, puede demostrarse que

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma} = \frac{3}{2} \frac{\sigma'}{\sigma_e} \quad (7)$$

siendo  $\sigma'$  el tensor de esfuerzo deviatorico, definido como

$$\sigma' = \sigma - \frac{1}{3} \text{tr}(\sigma) I \quad (8)$$

con  $\text{tr}(\sigma)$  la traza del tensor de esfuerzo e  $I$  el tensor identidad. Reemplazando la ecuación 7 en la ecuación 6 se puede reescribir el incremento de deformación plástica como

$$d\epsilon^p = \frac{3}{2} d\lambda \frac{\sigma'}{\sigma_e} \quad (9)$$

Llevando la ecuación 9 a la ecuación 2 se puede hallar que

$$dp = d\lambda \quad (10)$$

con lo cual es posible afirmar que

$$d\epsilon^p = \frac{3}{2} dp \frac{\sigma'}{\sigma_e} \quad (11)$$

siendo esta la regla de flujo de Prandtl-Reuss.

La expansión de la superficie de fluencia garantiza que el punto de carga siempre permanezca sobre esta durante la deformación plástica, por lo tanto es posible escribir la condición de consistencia en función de los incrementos de esfuerzo y deformación plástica efectiva como

$$f(\boldsymbol{\sigma} + d\boldsymbol{\sigma}, p + dp) = f(\boldsymbol{\sigma}, p) + df(\boldsymbol{\sigma}, p) = 0 \quad (12)$$

donde se tiene que

$$df(\boldsymbol{\sigma}, p) = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : d\boldsymbol{\sigma} + \frac{\partial f}{\partial p} dp = 0 \quad (13)$$

Para un material con plasticidad J2 se puede definir el tensor normal  $\mathbf{n}$  como

$$\mathbf{n} = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{3}{2} \frac{\boldsymbol{\sigma}'}{\sigma_e} \quad (14)$$

de forma tal que la ecuación 13 se puede reescribir como

$$df(\boldsymbol{\sigma}, p) = \mathbf{n} : d\boldsymbol{\sigma} + \frac{\partial f}{\partial p} dp = 0 \quad (15)$$

Ahora bien, aplicando la notación de Voigt se obtiene que

$$\mathbf{n} : d\boldsymbol{\sigma} \equiv \mathbf{n} \cdot d\boldsymbol{\sigma} \quad (16)$$

donde  $\mathbf{n}$  es el vector normal y  $d\boldsymbol{\sigma}$  es el incremento del vector de esfuerzo; por lo tanto, reemplazando la ecuación 16 en la ecuación 15, la condición de consistencia puede expresarse como

$$df(\boldsymbol{\sigma}, p) = \mathbf{n} \cdot d\boldsymbol{\sigma} + \frac{\partial f}{\partial p} dp = 0 \quad (17)$$

Adicionalmente, reemplazando la ecuación 14 en la ecuación 6 se obtiene el incremento de la deformación plástica en función del tensor normal como la ecuación 18,

$$d\boldsymbol{\varepsilon}^p = d\lambda \mathbf{n} \quad (18)$$

la cual puede escribirse en notación de Voigt de la forma

$$d\boldsymbol{\varepsilon}^p = d\lambda \mathbf{n} \quad (19)$$

Empleando la ecuación 19, la ley de Hooke para el material elastoplástico lineal queda definida como

$$d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}(d\boldsymbol{\varepsilon} - d\boldsymbol{\varepsilon}^p) = \mathbf{C}(d\boldsymbol{\varepsilon} - d\lambda \mathbf{n}) \quad (20)$$

siendo C la matriz de rigidez elástica. Con base en la ecuación 20 y retomando la ecuación 10, la expresión final de la condición de consistencia es la siguiente:

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{C}(d\boldsymbol{\varepsilon} - d\lambda \mathbf{n}) + \frac{\partial f}{\partial p} d\lambda = 0 \quad (21)$$

de la cual puede despejarse el multiplicador plástico

$$d\lambda = \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{C} d\boldsymbol{\varepsilon}}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{C} \mathbf{n} - \frac{\partial f}{\partial p}} \quad (22)$$

Finalmente, retomando la ecuación 5 se puede demostrar, para un material con endurecimiento isotrópico lineal, que

$$\frac{\partial f}{\partial p} = -\frac{\partial r}{\partial p} = -h \quad (23)$$

por lo que el multiplicador plástico para un material elastoplástico isotrópico lineal queda definido como

$$d\lambda = \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{C} d\boldsymbol{\varepsilon}}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{C} \mathbf{n} + h} \quad (24)$$

### Integración explícita

Si para un instante de tiempo t se conoce el incremento total de la deformación  $d\boldsymbol{\varepsilon}$  junto con el esfuerzo  $\boldsymbol{\sigma}^t$ , la ecuación 24 permite calcular el multiplicador plástico

$$d\lambda_t = \frac{\mathbf{n}_t \cdot \mathbf{C} d\boldsymbol{\varepsilon}_t}{\mathbf{n}_t \cdot \mathbf{C} \mathbf{n}_t + h} \quad (25)$$

de forma tal que los incrementos de esfuerzo  $d\boldsymbol{\sigma}$  y endurecimiento  $dr$  se pueden obtener como

$$d\boldsymbol{\sigma}_t = \mathbf{C}(d\boldsymbol{\varepsilon}_t - d\lambda_t \mathbf{n}_t) \quad (26)$$

$$dr_t = h d\lambda_t$$

y así los valores del esfuerzo, la deformación y la función de endurecimiento al final del paso  $t+\Delta t$  pueden calcularse como sigue:

$$\boldsymbol{\sigma}_{t+\Delta t} = \boldsymbol{\sigma}_t + d\boldsymbol{\sigma}_t$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^P_{t+\Delta t} = \boldsymbol{\varepsilon}^P_t + d\lambda_t \mathbf{n}_t \quad (27)$$

$$r_{t+\Delta t} = r_t + dr_t$$

lo que se conoce como esquema de integración explícita forward Euler.<sup>15</sup> El diagrama de flujo del algoritmo se ilustra en la [figura 1](#).

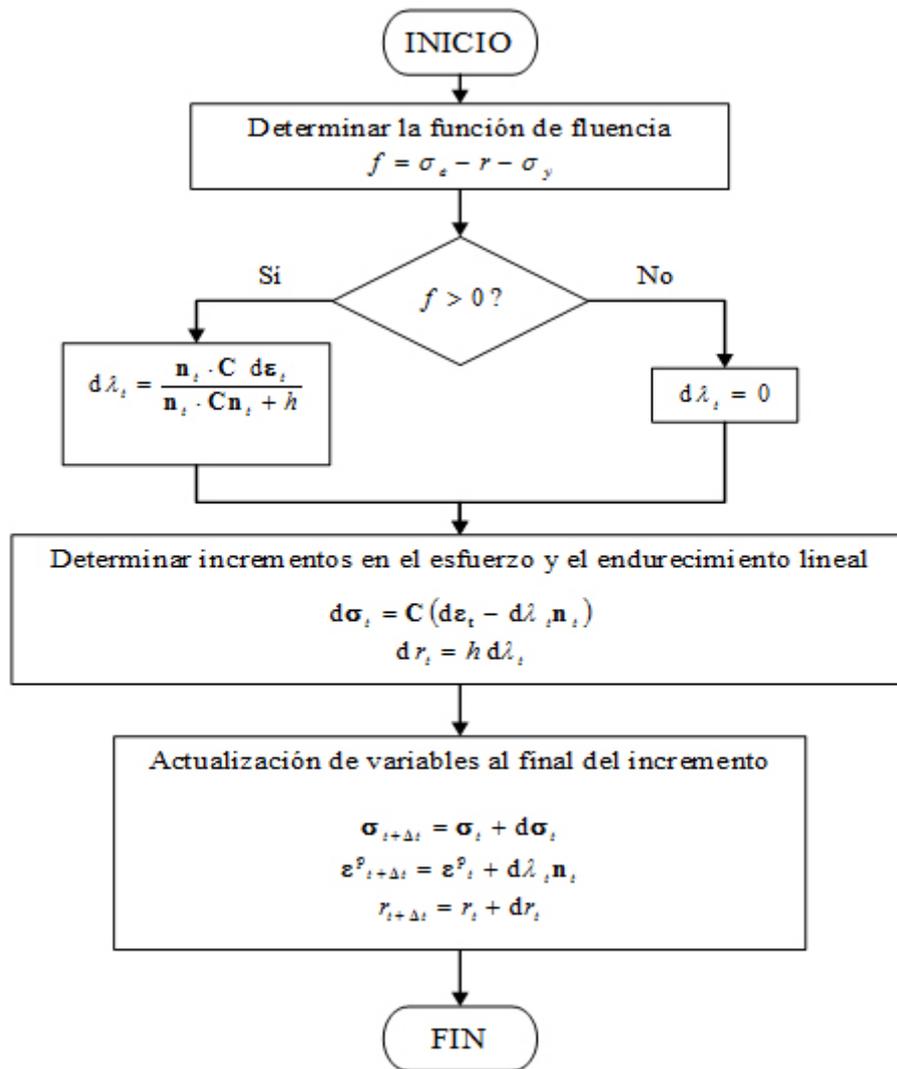


Fig. 1. Diagrama de flujo del esquema de integración explícita.

## IMPLEMENTACIÓN NUMÉRICA

La implementación del modelo de plasticidad isotrópica en el código de ABAQUS se realiza a través de una subrutina UEL en la que se programa un elemento finito bidimensional de cuatro nodos usando lenguaje FORTRAN.

Las funciones que debe desarrollar la UEL son las siguientes:

1. Leer toda la información proveniente de ABAQUS: nodos, conectividades, desplazamientos, condiciones de frontera.
2. Integrar las ecuaciones constitutivas del material empleando el esquema de integración explícita.
3. Actualizar los esfuerzos y las deformaciones en cada paso de integración y escribirlos en la base de datos que contiene los resultados del modelo.
4. Proporcionar a ABAQUS la información necesaria para realizar la integración de la ecuación de equilibrio de elementos finitos.

En este trabajo se eligió un esquema implícito de Newton-Raphson para integrar la ecuación de equilibrio, siendo necesario que la UEL proporcione el vector residuo  $\Psi$  y la matriz jacobiana  $\mathbf{J}$ . El primero se define como

$$\Psi = \mathbf{K} \mathbf{u} - \mathbf{f}^p - \mathbf{f} \quad (28)$$

donde  $\mathbf{K}$  es la matriz de rigidez elástica,  $\mathbf{u}$  es el vector de desplazamientos nodales,  $\mathbf{f}$  es el vector de fuerzas externas y  $\mathbf{f}^p$  es el término asociado a la deformación plástica, dado por

$$\mathbf{f}^p = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \mathbf{B}_i^T \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon}^p dV \quad (29)$$

siendo  $B_i$  la matriz de derivadas de las funciones de forma para el  $i$ -ésimo nodo y  $N$  el número de nodos.

La matriz jacobiana se define como

$$\mathbf{J} = \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{u}} \quad (30)$$

de forma tal que al linealizar la ecuación 28 mediante una expansión en series de Taylor, se obtiene que

$$\Psi + \mathbf{J} \Delta \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (31)$$

luego, para la  $n$ -ésima iteración por Newton-Raphson se tiene que

$$\mathbf{J}(\mathbf{u}_n) \Delta \mathbf{u}_n = -\Psi_n \quad (32)$$

y por lo tanto el desplazamiento puede ser actualizado por

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + \Delta \mathbf{u}_n \quad (33)$$

Bajo este esquema de integración el proceso iterativo se repetirá hasta que se alcance un determinado límite de tolerancia en el vector residuo. Con el fin de acoplar el esquema de integración implícito de las ecuaciones de equilibrio con el esquema de integración explícita de las ecuaciones constitutivas se emplea una matriz jacobiana continua, que es deducida directamente de las ecuaciones constitutivas y está definida por

$$\mathbf{J} = \frac{\partial \mathbf{d}\boldsymbol{\sigma}}{\partial \mathbf{d}\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{C} - \mathbf{C}_{\mathbf{n}} \otimes \frac{\partial \mathbf{d}\lambda}{\partial \mathbf{d}\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (34)$$

Partiendo de la ecuación 24 puede mostrarse que

$$\frac{\partial d\lambda}{\partial d\epsilon} = \frac{C_n}{n \cdot C_n + h} \quad (35)$$

luego, es posible reemplazar la ecuación 35 en la ecuación 34 y reescribir la matriz jacobiana continua como

$$J = C - \frac{C_n \otimes C_n}{n \cdot C_n + h} \quad (36)$$

## RESULTADOS

A continuación se presenta la validación del modelo y su aplicación a la expansión de un *stent* cardiovascular. La validación se realizó solucionando dos ejemplos tipo benchmark: una placa con agujero central bajo condición de esfuerzo plano y una barra con muesca en V bajo condición de esfuerzo axisimétrico. Los resultados numéricos de ambos ejemplos se comparan con las soluciones obtenidas al emplear el esquema implícito de retorno radial que posee ANSYS. Adicionalmente, el segundo ejemplo se compara frente a una rutina de usuario UMAT para ABAQUS creada por Dunne y Petrinic,<sup>15</sup> la cual permite resolver problemas axisimétricos de endurecimiento isotrópico con esquema explícito. Finalmente, el modelo se emplea para simular la expansión de un *stent* coronario.

### 1. Placa con agujero central

El primer ejemplo consiste en una placa perforada en el centro bajo condición de esfuerzo plano. Este tipo de problema ha sido estudiado por diversos investigadores, entre ellos Zienkiewics y Taylor,<sup>18</sup> Auricchio y Taylor,<sup>19</sup> de Souza Neto y otros,<sup>20</sup> Kossa y otros<sup>1</sup> y Szabó.<sup>21</sup>

#### a) Descripción del problema

La geometría, las condiciones de frontera y la malla del problema se ilustran en la [figura 2](#). La placa tiene un tamaño de 36 mm x 20 mm, con un agujero de 5 mm de diámetro en su centro y un espesor de 1 mm. Debido a la simetría del problema solo se modela un cuarto de la placa y se emplean elementos de cuatro nodos. La malla consiste en 1 452 elementos con 1 541 nodos. La condición de esfuerzo plano se produce al someter la cara superior de la probeta a un desplazamiento vertical de 1 mm. Las propiedades del material son las siguientes: módulo de elasticidad  $E = 2 \times 10^5$  MPa, relación de Poisson  $\nu = 0.3$ , esfuerzo de fluencia  $\sigma_y = 150$  MPa y tasa de endurecimiento  $h = 2.666 \times 10^4$  MPa.

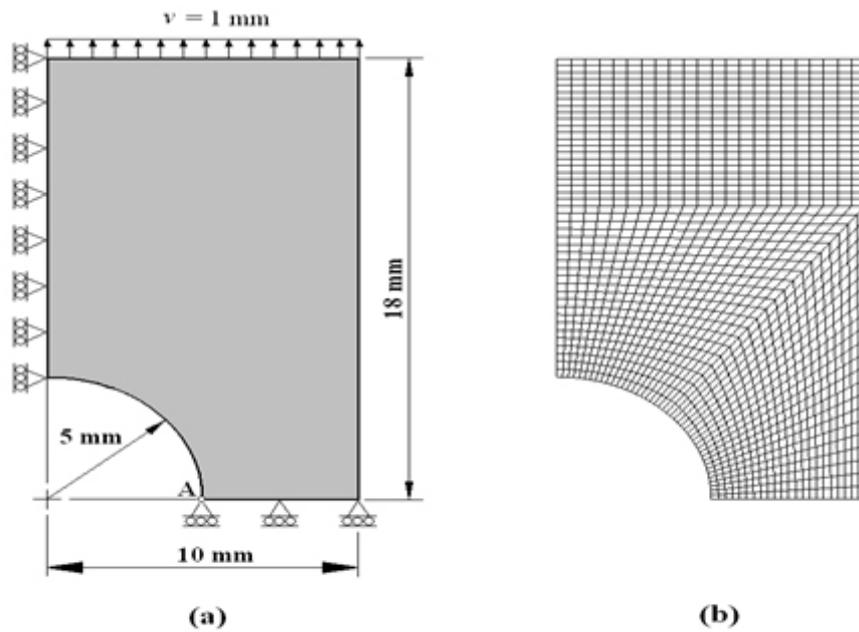


Fig. 2. Placa perforada bajo esfuerzo plano. (a) geometría y condiciones de frontera. (b) malla de elementos finitos.

b) Resultados numéricos

Para la verificación numérica del modelo se monitorea el desplazamiento horizontal  $u^A$  del punto A, como se observa en la figura 2(a), empleando cinco tamaños de paso diferentes:  $\Delta t=0.202$ ,  $\Delta t=0.01$ ,  $\Delta t=0.005$ ,  $\Delta t=1/300$  y  $\Delta t=0.0025$ . El error relativo del desplazamiento  $\xi^u$  está definido por

$$\xi_u = \text{abs} \left( \frac{u_A^{\text{ref}} - u_A}{u_A^{\text{ref}}} \right) \times 100 \quad (37)$$

donde el desplazamiento de referencia  $u_A^{\text{ref}}$  es obtenido empleando el UEL con un incremento de  $\Delta t=0.005$  ( $u_A^{\text{ref}} = 0.42644$  mm). Los resultados obtenidos se resumen en la [tabla 1](#).

Tabla 1. Monitoreo del desplazamiento horizontal del punto A para la placa con agujero central

$\Delta t$	Incrementos	UEL		ANSYS	
		$u_A$ [mm]	$\xi_u$ [%]	$u_A$ [mm]	$\xi_u$ [%]
0.02	50	-0.42167	1.118562	-0.426471	0.0072694
0.01	100	-0.42118	1.233467	-0.426434	0.0014069
0.005	200	-0.42564	0.187599	-0.426397	0.0100834
1/300	300	-0.42621	0.053934	-0.426375	0.0152424
0.0025	400	-0.42658	0.032829	-0.426365	0.0175874
0.0005	2000	-0.42644	0	-0.426339	0.0236844

La [figura 3](#) muestra el perfil de desplazamiento horizontal obtenido con el UEL y ANSYS. El comportamiento del error respecto a los diferentes tamaños de paso para ambas soluciones se muestra en la [figura 4](#) en escala logarítmica.

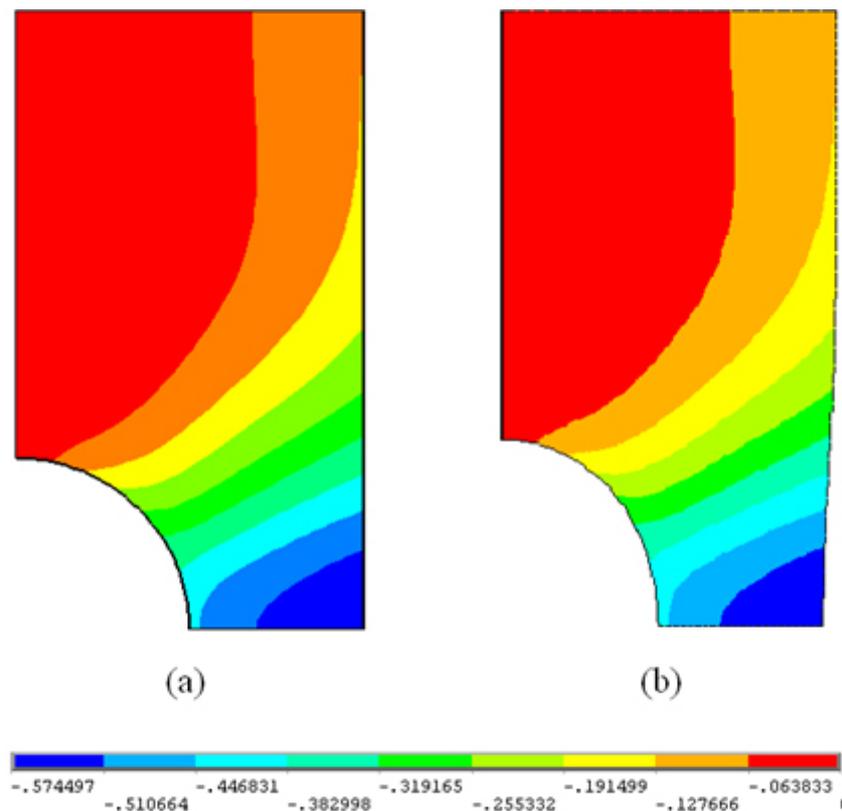


Fig. 3. Perfiles de desplazamiento horizontal en milímetros para la placa con agujero central. (a) UEL (b) ANSYS.

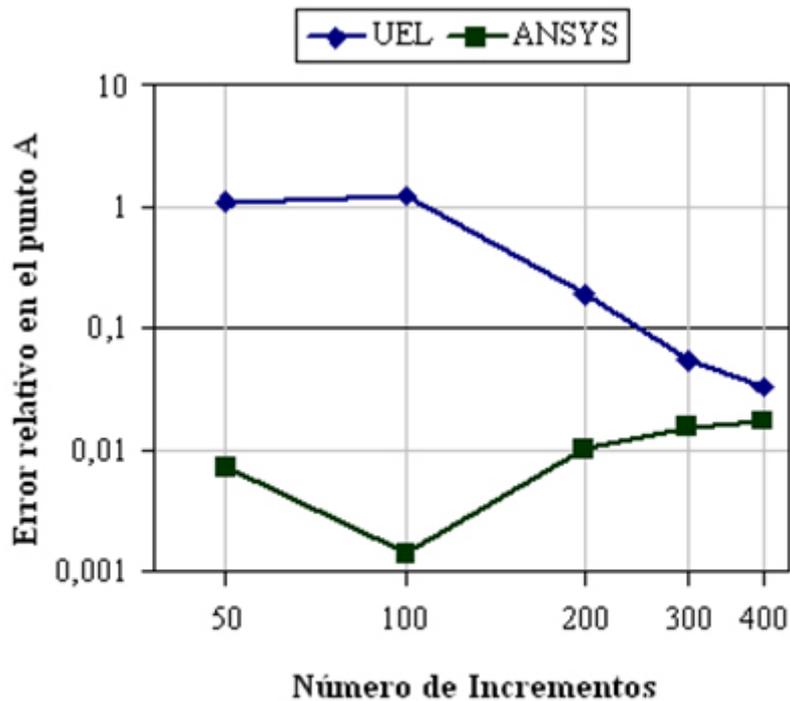


Fig. 4. Error relativo en el desplazamiento horizontal del punto A contra el número de incrementos para la placa perforada.

## 2. Probeta cilíndrica con muesca en V

El segundo ejemplo consiste en una probeta cilíndrica sometida a tensión, la cual posee una muesca en V en la mitad de su longitud. Este problema es similar al estudiado por Wilson<sup>22</sup> y emplea las propiedades de material propuestas por Lam.<sup>17</sup>

### a) Descripción del problema

La geometría de la probeta se ilustra en la [figura 5](#). Posee un diámetro nominal de 0.5 in y una longitud de 4.5 in. En la muesca posee un diámetro de 0.25 in. Los chaflanes de la muesca tienen un ángulo entre caras de 45° y el radio de muesca es de 0.02 in. Debido a que la probeta es un sólido de revolución se decide realizar un modelo axisimétrico con elementos de cuatro nodos, por lo tanto solo se modela 1/4 de la sección longitudinal de esta, como se ilustra en la [figura 6 \(a\)](#). La malla consiste en 2 780 elementos con 2 920 nodos, como se observa en la [figura 6 \(b\)](#). La condición de tensión en la barra se produce al someter la probeta a un desplazamiento longitudinal de 0.0075 in. Se emplea una aleación de aluminio C460-T8E67, cuyas propiedades son las siguientes: módulo de elasticidad  $E = 9.918 \times 10^6$  psi, relación de Poisson  $\nu = 0.33$ , esfuerzo de fluencia  $\sigma_y = 6100$  psi y tasa de endurecimiento  $h = 2.297 \times 10^5$  psi.

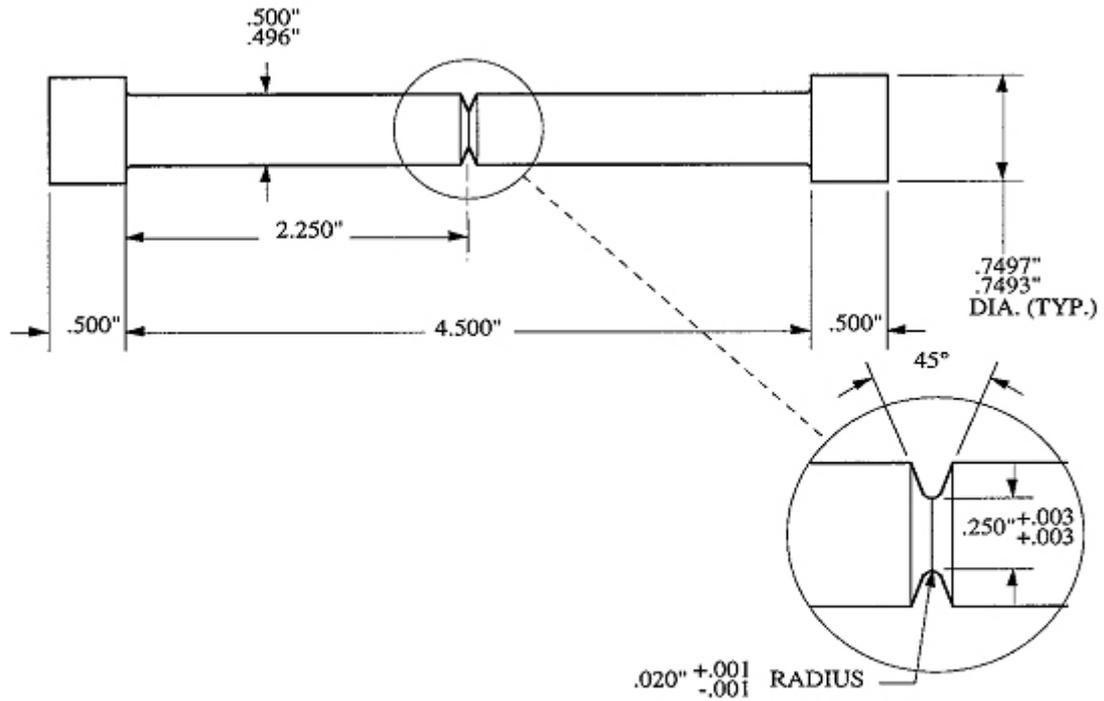


Fig. 5. Probeta cilíndrica con muesca en V. Fuente: Wilson<sup>22</sup>

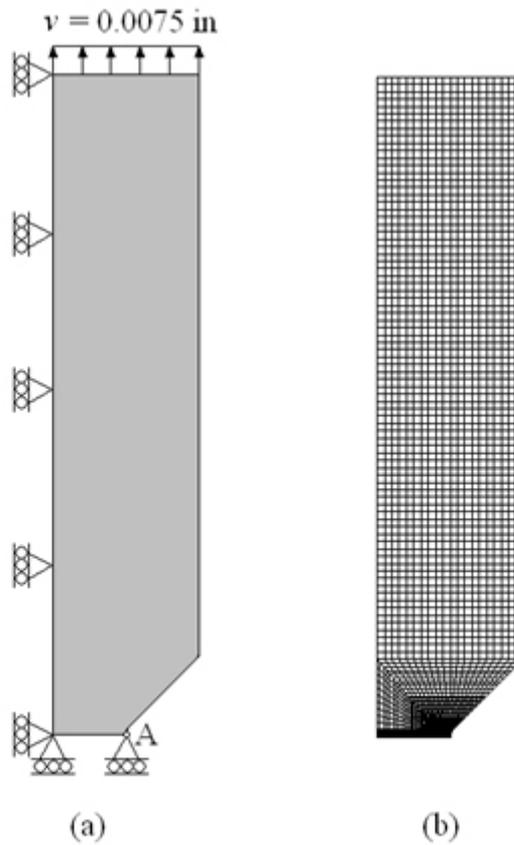


Fig. 6. Modelo axisimétrico para el ejemplo axisimétrico.  
 (a) Geometría y condiciones de frontera.  
 (b) Malla de elementos finitos.

b) Resultados numéricos

La verificación numérica de este problema sigue una metodología similar a la del ejemplo anterior. Se monitorea el desplazamiento horizontal  $u_A$  del punto A, como se observa en la [figura 6\(a\)](#), empleando los mismos cinco incrementos del problema anterior. El error relativo vuelve a estar definido por la ecuación 37, con un desplazamiento de referencia  $u_A^{ref} = -3.519 \times 10^{-3}$  in. Los resultados obtenidos se resumen en la [tabla 2](#).

Tabla 2. Monitoreo del desplazamiento horizontal del punto A para el ejemplo axisimétrico

$\Delta t$	Incrementos	UEL		UMAT		ANSYS	
		$u_A$ [in]	$\xi_u$ [%]	$u_A$ [in]	$\xi_u$ [%]	$u_A$ [in]	$\xi_u$ [%]
0.02	50	-3.29060E-03	6.49048	-3.18397E-03	9.52060	-3.43354E-03	2.42853
0.01	100	-3.40050E-03	3.36743	-3.29845E-03	6.26741	-3.43167E-03	2.48167
0.005	200	-3.46080E-03	1.65388	-3.36842E-03	4.27906	-3.43068E-03	2.50980
1/300	300	-3.48600E-03	0.93777	-3.38813E-03	3.71895	-3.43034E-03	2.51947
0.0025	400	-3.49500E-03	0.68201	-3.39586E-03	3.49929	-3.43017E-03	2.52430
0.0005	2000	-3.51900E-03	0	-3.42271E-03	2.73629	-3.42975E-03	2.53623

La [figura 7](#) muestra el perfil de desplazamiento horizontal obtenido con el UEL, ANSYS y el UMAT de Dune y Petrinic.<sup>15</sup> El comportamiento del error respecto a los diferentes incrementos para las tres soluciones se muestra en la [figura 8](#) en escala logarítmica.

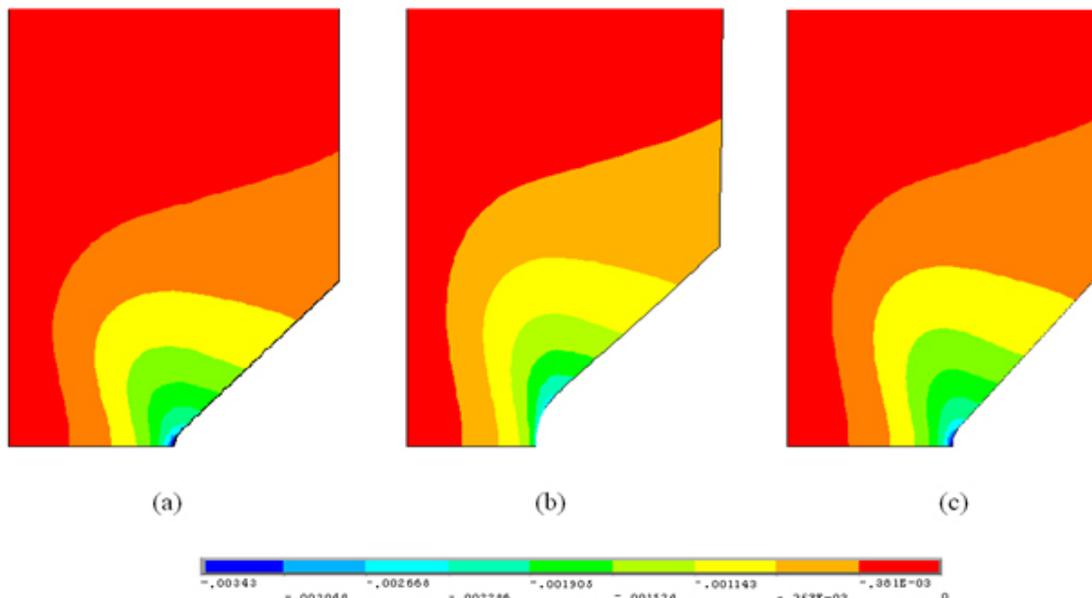


Fig. 7. Perfil de desplazamiento horizontal en pulgadas para el ejemplo axisimétrico. (a) UEL (b) ANSYS (c) UMAT.

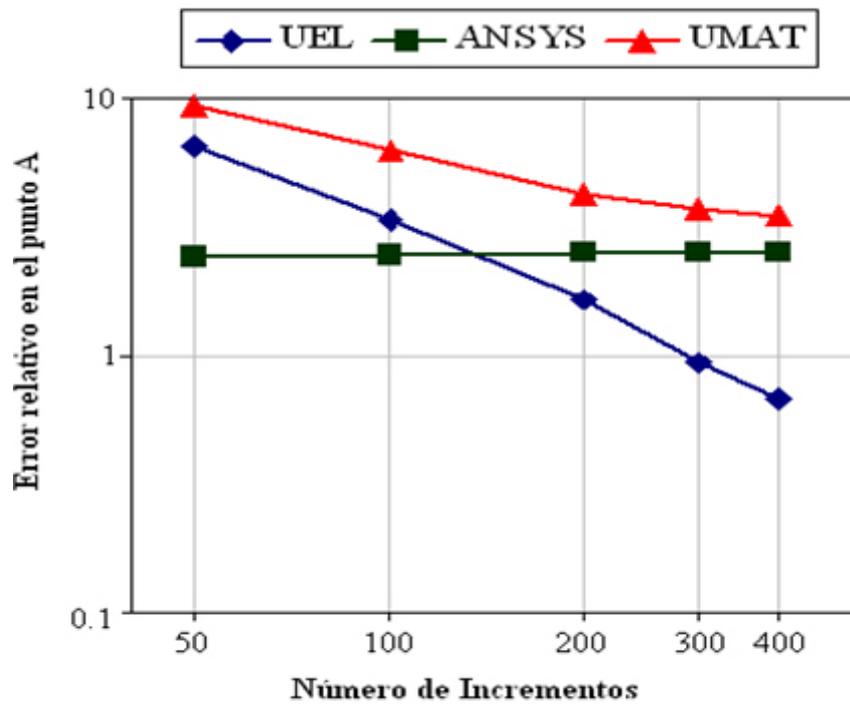


Fig. 8. Error relativo en el desplazamiento horizontal del punto A contra el número de incrementos para el ejemplo axisimétrico.

### 3. Expansión de un *stent* coronario

El problema consiste en simular la expansión de un *stent* coronario sobre la base de la geometría del *stent* comercial NIR<sup>TM</sup>, el cual se ilustra en la [figura 9](#). Este es un *stent* de expansión por globo, fabricado en acero inoxidable 316L usando corte con láser, con un diámetro inicial de 0.676 mm y un diámetro de expansión de 2.52 mm. Este problema está basado en el trabajo de McGarry y otros<sup>5</sup> y emplea las propiedades de material descritas por Holzapfel y Kioussis.<sup>13</sup>

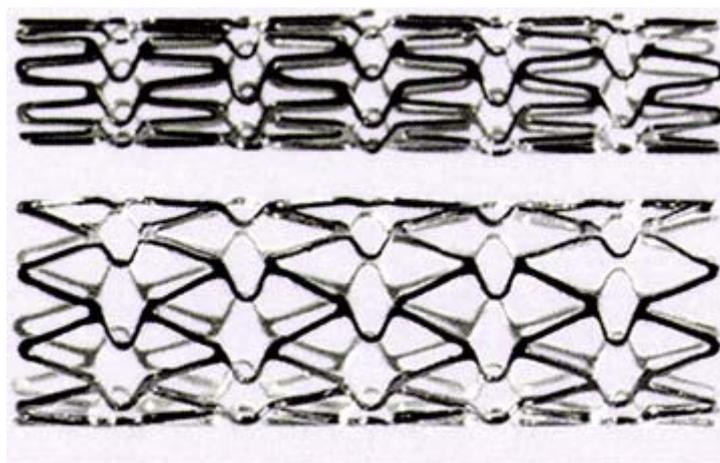


Fig. 9. Stent NIR. Fuente: Toshihiro.<sup>23</sup>

a) Descripción del problema

La geometría de la celda unitaria del *stent* con sus dimensiones críticas se ilustra en la [figura 10](#). Se decide emplear un modelo bidimensional de deformación plana. La malla consiste en 2 376 elementos con 2 593 nodos, como se ilustra en la [figura 11](#). Se emplean las siguientes propiedades para el acero 316L: módulo de elasticidad  $E= 2 \times 10^5$  MPa, relación de Poisson  $\nu= 0.3$ , esfuerzo de fluencia  $\sigma_y= 300$  MPa y tasa de endurecimiento  $h= 1.333 \times 10^3$  MPa.

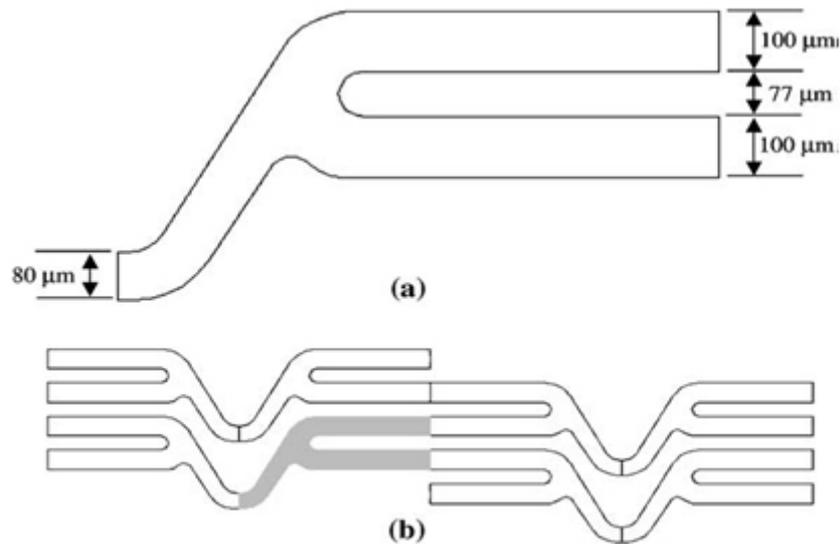


Fig. 10. Geometría del *stent*. (a) Celda unitaria con sus dimensiones críticas. (b) patrón geométrico del *stent*. Fuente: McGarry y otros.<sup>5</sup>

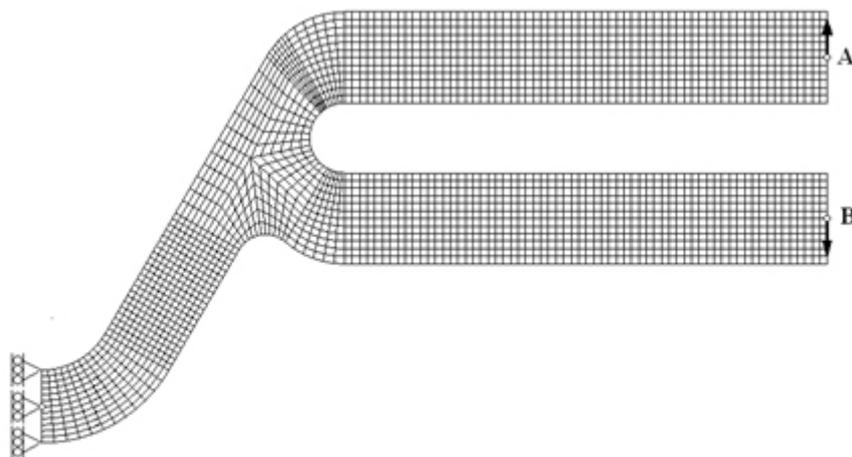


Fig. 11. Malla de elementos finitos empleada para la simulación de la expansión del *stent* coronario.

b) Resultados numéricos

La expansión del *stent* se evalúa de acuerdo con la distancia relativa entre los puntos A y B ubicados en el centro de los extremos flexibles de la celda unitaria ([Fig. 11](#)). McGarry y otros<sup>5</sup> proponen que el diámetro del *stent*, para una configuración de doce celdas unitarias alrededor de la circunferencia, puede calcularse de la forma siguiente:

$$D = \frac{12}{\pi} |AB| \quad (38)$$

en donde  $D$  es el diámetro del *stent* medido sobre su circunferencia media y  $|AB|$  es la distancia relativa entre los puntos A y B. Teniendo en cuenta que  $D$  debe aumentar de 0.676 mm a 2.52 mm, se aplican desplazamientos verticales a los puntos A y B de forma tal que la distancia relativa  $|AB|$  se incremente desde 0.177 mm a 0.66 mm. La [figura 12](#) ilustra los perfiles de desplazamiento horizontal y vertical para el *stent*. La solución fue obtenida usando un tamaño de paso  $\Delta t = 0.0005$ .

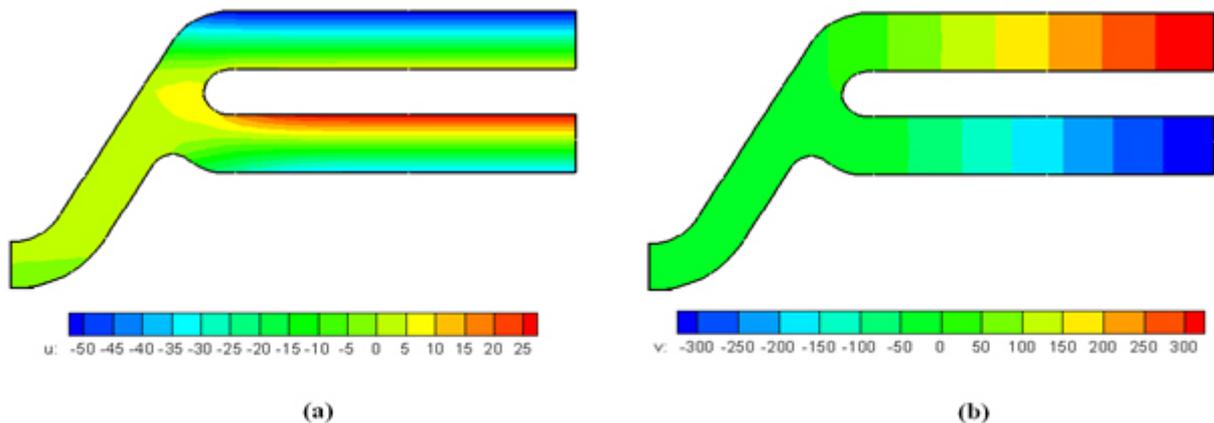


Fig. 12. Perfiles de desplazamiento en micrómetros para la celda unitaria: (a) horizontal (b) vertical.

## DISCUSIÓN

En este artículo se presenta un modelo de endurecimiento isotrópico con esquema de integración explícita para biomateriales metálicos y su implementación al código de elementos finitos de ABAQUS a través de un elemento de usuario UEL programado en lenguaje FORTRAN. El modelo fue validado mediante dos ejemplos tipo benchmark, uno bajo condición de esfuerzo plano y otro con axisimetría, y los resultados numéricos fueron comparados frente a las soluciones obtenidas empleando el método de retorno radial disponible en ANSYS y la rutina de usuario UMAT desarrollada por Dune y Petrinic<sup>15</sup> para problemas axisimétricos.

Las [figuras 3](#) y [7](#) permiten comparar los perfiles de desplazamiento obtenidos para ambos ejemplos benchmark, observándose que hay correspondencia entre los resultados del UEL y ANSYS. El monitoreo del desplazamiento horizontal del punto A, resumido en las [tablas 1](#) y [2](#), permite concluir que el error numérico del UEL respecto a ANSYS es aceptable, teniendo en cuenta que el código de elementos finitos implementado no cuenta con las estrategias optimizadas de proyección de esfuerzos disponibles en los códigos comerciales. Las [figuras 8](#) y [12](#) permiten comparar el comportamiento del error relativo del desplazamiento horizontal del punto A contra el número de incrementos, observándose que el UEL es más exacto para la condición de esfuerzo plano que para la axisimetría, lo cual es atribuible a la

propagación del error numérico que genera la proyección de esfuerzos de los puntos de gauss a los nodos. Este error numérico también explica que el comportamiento del error para ambos esquemas explícitos, UMAT y UEL, no coincida.

Finalmente, el modelo fue empleado para simular la expansión de un *stent* fabricado en acero inoxidable 316L, siguiendo el trabajo desarrollado por McGarry y otros.<sup>5</sup> El modelo permitió simular la expansión del implante desde un diámetro de 0.676 mm hasta un diámetro de 2.52 mm, calculando una sola celda unitaria con deformación plana. El estudio de otros casos de carga contemplados por McGarry y otros,<sup>5</sup> como, por ejemplo, el efecto de la presión de pulso arterial<sup>6</sup> sobre el *stent* se realizará en un trabajo futuro mediante el acoplamiento del modelo desarrollado con la mecánica de daño continuo,<sup>24</sup> esto con el fin de predecir la falla por fatiga sin hacer uso de los diagramas de Goodman.

## Agradecimientos

Carlos Alberto Narváez-Tovar y Oscar Rodrigo López-Vaca fueron financiados por el Fondo de Investigaciones de la Universidad Santo Tomás FODEIN- USTA, mediante Convocatoria Interna 05-2008-2009.

Diego Alexander Garzón-Alvarado fue financiado mediante la Convocatoria de Grupos 2009, de la Dirección de Investigación de la sede Bogotá de la Universidad Nacional de Colombia.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. Kossa A, Szabó L. Exact integration of the Von Mises elastoplasticity model with combined linear isotropic-kinematic hardening. *International Journal of Plasticity*. 2009;25:1083-1106.
2. Habraken AM. Modelling the Plastic Anisotropy of Metals. *Arch Comput Meth Engng*. 2004;11(1):3-96.
3. Chaboche JL. A review of some plasticity and viscoplaesticity constitutive theories. *International Journal of Plasticity*. 2008;24:1642-93.
4. Walke W, Paszenda Z, Jurkiewicz W. Biomechanical behaviour of coronary stent design with OCC technology. *Journal of Achievements in Materials and Manufacturing Engineering*. 2007;20(1-2):199-202.
5. McGarry JP, O'Donnell BP, McHugh PE, McGarry JG. Analysis of the mechanical performance of a cardiovascular stent design based on micromechanical modelling. *Computational Materials Science*. 2004;31:421-38.
6. Liang DK; Yang DZ, Qi M, Wang WQ. Finite element analysis of the implantation of a balloon-expandable stent in a stenosed artery. *International Journal of Cardiology*. 2005;104:314-18.
7. De Beule M, Mortier P, Carlier SG, Verheghe B, Van Impe R, Verdonck P. Realistic finite element-based stent design: The impact of balloon folding. *Journal of Biomechanics*. 2008;41:38389.
8. Migliavacca F, Petrini L, Massarotti P, Schievano S, Auricchio F, Dubini G. Stainless and shape memory alloy coronary stents: a computational study on the interaction with the vascular wall. *Biomechan Model Mechanobiol*. 2004,2:205-17.
9. Wu W, Yang D-Z, Huang Y-Y, Qi M, Wang W-Q. Topology optimization of a novel stent platform with drug reservoirs. *Medical Engineering & Physics*. 2008;30:1177-85.
10. Li N, Zhang H, Ouyang H. Shape optimization of coronary artery stent based on a parametric model. *Finite Elements in Analysis and Design* 2009;45:468-75.
11. Mori K, Saito T. Effects of stent structure on Stent Flexibility Measurements. *Annals of Biomedical Engineering*. 2005,33(6):733-42.

12. Wu W, Yang D-Z, Qi M, Wang W-Q. An FEA method to study flexibility of expanded coronary stents. *Journal of Materials Processing Technology*. 2007;184:447-50.
13. Holzapfel GA, Kioussis DE. Biomechanical Characterization of the stented artery. Computational solid mechanical aspects. En: Chakfé N, Durand B, Kretz JG. *ESVB 2007. New Technologies in vascular biomaterials. Fundamentals about stents*. Cap. 2. Strasbourg: 2007. p. 11-23.
14. Zahedmanesh H, Kelly DJ, Lally C. Simulation of a balloon expandable stent in a realistic coronary artery. Determination of the optimum modeling strategy. *Journal of Biomechanics*. 2010,43:2126-32.
15. Dunne F, Petrinic N. *Introduction to computational plasticity*. New York: Oxford University Press, 2005.
16. Yu M-H, Ma G-W, Qiang H-F, Zhang Y-Q. *Generalized Plasticity*. Berlín: Springer; 2006.
17. Lam DF. Strain concentration and tension dominated stiffened aerospace structures. University of Akron; 2006. Disponible en: <http://etd.ohiolink.edu/view.cgi/Lam%20Daniel%20F.pdf?akron1145393262>
18. Zienkiewicz OC, Taylor RL. *The Finite Element Method*. Vol. II. 4 ed. London: McGraw Hill; 1991.
19. Auricchio F, Taylor RL. A return-map algorithm for general associative isotropic elasto-plastic materials in large deformation regimes. *International Journal of Plasticity*. 1999;15:1359-78.
20. De Sousa Neto EA, Perić D, Owen DRJ. *Computational methods for plasticity*. Willey; 2009.
21. Szabó L. A semi-analytical integration method for J2 flow theory of plasticity with linear isotropic hardening. *Comput Methods Appl Mech Engrg*. 2009;198:2151-66.
22. Wilson CD. A Critical Reexamination of Classical Metal Plasticity. *ASME. Journal of Applied Mechanics*. 2002,69:63-68.
23. Toshihiro U. Sample of the stent and balloon catheter. [en línea] <http://www.ne.jp/asahi/ueda/stroke/stent.html> [citado 29 de agosto de 2010]
24. Yun S, Palazotto A. Damage mechanics incorporating two back stress kinematic hardening constitutive models. *Engineering Fracture Mechanics*. 2007;74:2844-63.

Recibido: 28 de agosto de 2010.  
Aprobado: 10 de septiembre de 2010.

Ing. *Carlos Alberto Narváez-Tovar*. Facultad de Ingeniería Mecánica. Universidad Santo Tomás, Bogotá, Colombia.

---