

## **Modelos matemáticos para el cálculo de la fatiga de contacto a partir de la formación de un *micropitting***

**Carlos Figueroa - Hernández, Carlos Diez - Cicero, Urbano Ordoñez - Hernández**

Recibido el 13 de agosto de 2010; aceptado el 2 de octubre de 2010

### **Resumen**

El presente trabajo muestra el proceso de obtención de modelos para calcular el número de ciclos necesarios, durante la formación de micropitting en aleaciones metálicas, sometidas a fatiga de contacto. En el desarrollo de los modelos se tuvo en consideración la iniciación de microgrietas debajo de la superficie en aquellos lugares donde, las tensiones tangenciales alcanzan magnitudes localmente superiores al límite de fluencia del material analizado. Los defectos microestructurales tales como: límites de grano, frontera de fases, la presencia de nódulos de grafito e inclusiones no metálicas se tuvieron en cuenta. Para la modelación se utilizaron expresiones que permiten realizar un balance energético en las diferentes etapas de incubación y propagación de grietas. Durante los cálculos se consideró que en el mecanismo de iniciación de grietas estuvo presente la acumulación de dislocaciones y el incremento local de las tensiones.

**Palabras claves:** Micropitting, Fatiga de contacto, Modelos matemáticos, Defectos, Grieta.

### **Mathematical models to determine the contact fatigue during the micropitting formation.**

#### **Abstract**

The present work show the procedure that allow to obtain the mathematical models to determine the number of necessary cycles during the formation of micropitting in metals alloys subjected to contact fatigue. During obtaining of the models was takes into account the formation of undersurface microcracks where the maxims tangential tensions appear, which reach values over the yield point of materials. Microestructural defects such as grain and face boundary, graphite nodules, nom metallic particles were also considered to obtain the mathematical equations. Incubation period and propagation of crack on the material were described using an energetic balance. During the calculations it was considered that in the mechanism of crack initiation was present the movement of dislocations and the local increasing of stress. It was determined that irreversibility factor has a significant influence in the obtaining of mathematics model.

**Key words:** Micropitting, Contact fatigue, Mathematics model, Defects, Crack.

## 1. Introducción.

La durabilidad de los elementos mecánicos sometidos a fatiga de contacto, se determina a partir de ensayos de laboratorio, donde finalmente, se obtiene una curva que describe el comportamiento de las tensiones que son aplicadas en la superficie del material, con respecto al número de ciclos de aplicación de la carga. Para la obtención del comportamiento antes citado se requiere de un gran número de ensayos.

En el presente trabajo se muestra la obtención de las expresiones que permitirán determinar, la cantidad de ciclos necesarios para la iniciación de una grieta de fatiga superficial.

El modo de manifestarse la rotura por fatiga de contacto es mediante la aparición del micropitting. El proceso de formación del mismo, ocurre a partir de una grieta que se inicia debajo de la superficie del material, y que crece por la acción de las cargas cíclicas. En este trabajo se hace un análisis y selección de las expresiones que más se pueden relacionar con los fenómenos de rotura durante el desgaste por rodadura, considerando las características metalográficas de los materiales metálicos.

## 2. Iniciación de una grieta de fatiga.

La incubación de una grieta por fatiga representa una de las etapas más importantes y más difíciles de pronosticar en el proceso de formación de un micropitting. La posición y forma de iniciación de la grieta depende de la microestructura del material, del tipo de carga aplicada y de la geometría de la pieza. Las grietas pueden ser iniciadas en la superficie o debajo de esta, en dependencia de las condiciones de contacto. Las tensiones de igual forma aparecen en los lugares citados anteriormente, las mismas pueden ser normales o tangenciales [1, 2, 8]. En el caso de las tangenciales, su máxima intensidad se alcanza a una determinada profundidad y es en ese lugar precisamente donde se originan las grietas que luego crecen hacia la superficie, formando un ángulo determinado. La profundidad donde aparecen las máximas tensiones tangenciales va a depender de las propiedades del material, de la magnitud de las cargas y de las condiciones del contacto.

Cuando la grieta es iniciada en el área de máximas tensiones subsuperficiales, el mecanismo de iniciación de la grieta es atribuido al movimiento de las dislocaciones a lo largo de las bandas de deslizamiento, límites de grano o en la interface de una inclusión [3].

Para el estudio de la influencia que tiene la presencia de un defecto en el material que lo rodea, se parte del punto de vista desarrollado por *Griffith* [4, 9], al introducir en el material una discontinuidad o grieta que es de forma elíptica. También se considera que la fatiga está ocurriendo bajo cargas normales cuyos valores están por debajo del límite de fluencia, pero que sin dudas provoca una deformación elástica en la geometría de aquellos defectos esféricos, convirtiéndolos en una elipse que puede influir decisivamente en la reducción del periodo de incubación de la grieta, pero que además brinda la posibilidad de hacer las suposiciones de *Griffith* y de calcular los parámetros geométricos necesarios y su influencia en la vida útil de la pieza [6, 7, 11]. La determinación de la energía de deformación alrededor de una grieta se determina utilizando la expresión dada por *Petch* [4]. En el caso de las tensiones tangenciales quedaría de la forma siguiente:

$$Wd = \frac{\pi C^2 \cdot \tau^2}{G} \quad (1)$$

Donde:  $C$  es la semilongitud del defecto,  $\tau$  tensión tangencial,  $G$  módulo de elasticidad tangencial.

El incremento  $\Delta Wd$  en cada ciclo de carga es obtenido sustituyendo las tensiones tangenciales por  $\Delta\tau = \tau_{\max} - \tau_{\min}$  y por  $2\tau_f$  que es la resistencia del material al movimiento de las dislocaciones. Entonces la expresión (2) quedaría de la forma siguiente.

$$\Delta Wd = \frac{\pi C^2 \cdot (\Delta\tau - 2\tau_f)^2}{G} \quad (2)$$

El número de ciclos necesarios para el inicio de una grieta en la interface metal inclusión puede ser determinado por la expresión siguiente [5].

$$\Delta Wd = 4\pi \cdot \rho \cdot S \quad (3)$$

Donde:  $N_i$  es el # de ciclos hasta que se inicia la grieta,  $S$  energía de fractura por unidad de área y  $\rho$  radio de la inclusión en el eje de mayor magnitud.

Durante la determinación del número de ciclos, es necesario tener en cuenta que las dislocaciones después que se agrupan son irreversibles. Por lo que el cálculo debe ser afectado por el coeficiente de irreversibilidad  $f$ .

Relacionando (2) y (3) se obtiene la expresión siguiente:

$$N_i = \frac{4 \cdot \rho \cdot S \cdot G}{C^2 \cdot (\Delta\tau - 2\tau_f)^2} \cdot \frac{2-f}{f} \quad (4)$$

Para calcular el radio de curvatura de la elipse formada, luego que un defecto esférico (poro o nódulo de grafito) ha sufrido una deformación elástica, se utilizó el programa de elemento finito ALGOR, donde se simuló los niveles de deformación del defecto para 4 valores de tensiones normales de contacto ( $\sigma$ ), tres por debajo del límite elástico y uno por encima. Se consideraron además las propiedades del material, en este caso, el hierro fundido. El radio de curvatura de la elipse ( $\rho$ ) se calculó utilizando la expresión (5). Los resultados se muestran en la Tabla 1.

$$\rho = \frac{b^2}{a} \quad (5)$$

Tabla No. 1. Resultados de la simulación

| Tensión normal ( $\sigma$ ) Mpa | Semieje mayor (a) mm | Semieje menor (b) mm | Radio de curvatura ( $\rho$ ) mm |
|---------------------------------|----------------------|----------------------|----------------------------------|
| 100                             | 0.0120060            | 0.0119783            | 0.011949768                      |
| 200                             | 0.0120138            | 0.0119500            | 0.011886538                      |
| 300                             | 0.0120206            | 0.0119349            | 0.011849810                      |
| 700                             | 0.0120482            | 0.0118482            | 0.011651520                      |

Con los resultados de la simulación se hizo un análisis de regresión, obteniéndose la expresión que permite relacionar la tensión normal aplicada ( $\sigma$ ) con el radio de curvatura ( $\rho$ ), expresión (6) y la función que relaciona la semilongitud del semieje mayor de la elipse ( $C$ ) con la tensión aplicada ( $\sigma$ ), expresión (7).

$$\rho = 0.12021 - \frac{0.03762}{\sigma} \quad (6)$$

$$C = 5.9 + 3.5 \cdot 10^{-5} \sigma \quad (7)$$

Después de obtenidas las características geométricas del defecto, debe ser utilizada la expresión (4) para calcular el número de ciclos hasta el inicio de la grieta

### 3. Otras consideraciones en el análisis de los mecanismos de iniciación de grietas.

El mecanismo de fractura propuesto para el análisis y obtención del modelo de iniciación de grietas es el de Cleavage, teniendo en cuenta que para  $n$  pares de dislocaciones, las cuales producen un desplazamiento  $nb$ , la longitud del núcleo formado producto de la acumulación de dislocaciones es igual a  $c$ , pudiéndose reconocer distintas contribuciones a la energía total, expresadas por unidad de espesor.  $E$  es el módulo de elasticidad longitudinal,  $G$  es módulo de elasticidad tangencial y  $\nu$  es el coeficiente de Poisson.

La energía de Griffith [10, 12] de una grieta de longitud total  $c$  bajo un esfuerzo  $p$ :

$$U_1 = - \frac{p^2 (1 - \nu^2)}{E} \left( \frac{c}{2} \right)^2 \quad (8)$$

El trabajo realizado por el esfuerzo en formar el núcleo:

$$U_2 = -\frac{1}{2} p n b c \quad (9)$$

La energía de deformación de la dislocación de borde “agrietada” con vector de Burger  $nb$ :

$$U_3 = +\frac{G(nb)^2}{4\pi(1-\nu)} \ln\left(\frac{2r}{c}\right) \quad (10)$$

Donde:  $r$  es tomado como la distancia sobre la cual este campo de deformación es efectivo y  $c/2$  es tomado como el radio del núcleo de la dislocación de borde agrietada.

El número de ciclos necesarios para el inicio de una grieta puede ser determinado a través de la expresión siguiente [5]:

$$N_i \Delta W d = 4\pi\rho\gamma \quad (11)$$

Para el caso de las tensiones tangenciales y suponiendo que en la grieta  $c=nb=R$ , las expresiones 8, 9, 10 se pueden escribir como sigue:

$$U_1 = -\frac{R^2 \tau_{\text{eff}}^2 (1-\nu^2)}{4G} \quad (12)$$

$$U_2 = -\frac{R^2 \tau_{\text{eff}}}{2} \quad (13)$$

$$U_3 = +\frac{GR^2}{4\pi(1-\nu)} \ln(2) \quad (14)$$

Por tanto, la expresión (11) se puede escribir de la forma siguiente:

$$N_i \left( \frac{R^2 \tau_{\text{eff}}^2 (1-\nu^2)}{4G} + \frac{R^2 \tau_{\text{eff}}}{2} \right) = 4\pi\rho\gamma + \frac{GR^2}{4\pi(1-\nu)} \ln(2) \quad (15)$$

Teniendo en cuenta que a la energía de deformación ( $\Delta W d$ ) estarán asociados los valores de energía  $U_1$  y  $U_2$  y al valor de energía superficial ( $\gamma$ ) se le agregó el valor de energía  $U_3$ , la ecuación 15 una vez despejado el número de ciclos  $N_i$  quedará como sigue:

$$N_i = \frac{4\pi\gamma + \frac{GR^2}{4\pi(1-\nu)} \ln(2)}{\left( \frac{R^2 \tau_{\text{eff}}^2 (1-\nu^2)}{4G} + \frac{R^2 \tau_{\text{eff}}}{2} \right)} \quad (16)$$

#### 4. Conclusiones.

- La metodología propuesta puede ser utilizada para predecir la formación de grietas a partir de inclusiones con geometría elíptica.
- Se obtuvieron expresiones para predecir la formación de un micropitting en aleaciones metálicas.
- El coeficiente de irreversibilidad de las dislocaciones tiene una influencia significativa en el período de incubación de un agrieta.
- Se ha obtenido un modelo matemático que permite calcular el período de incubación de una grieta ( $N_i$ ), en función de los parámetros límite de fluencia, módulos de elasticidad de primer y segundo orden, coeficiente de Poisson, carga actuante y magnitud del defecto.
- El incremento del semieje mayor de la elipse formada en el nódulo de grafito sometido a deformación elástica no es significativo.

## 5. Referencias.

1. HURLEY, P. J.;EVANS, W. J. "A new method for predicting fatigue crack propagation rates". *Materials Science and Engineering*. 2007. vol. 466, p. 265-273.
2. DOMMARCO, L. C.; BASTIAS, P. C.; DALL'O, H. A., *et al.* "Rolling Contact Fatigue (RCF) Resistance of Austempered Ductile Iron (ADI)". *Wear*. 1998. vol. 221, nº 1, p. 69-74.
3. GLODEZ, S. "Surface fatigue of gear teeth flanks". *Computer and Structures*. 1999. vol. 73, p. 475 - 483.
4. CHALMERS, B. *Metalurgia Física*. Estados Unidos: 1962. p 87-205.
5. TANAKA, K. "A theory of fatigue crack initiation at inclusion". *Metallurgical Transaction 13A*. 1982. vol. 117, nº 23.
6. PRADO, J. M. "Dry sliding wear of austempered ductile iron". *Materials Science and Technology*. The Institute of Materials. 1995. p. 340-448.
7. FIGUEROA, C. Estudio experimental sobre el comportamiento del hierro austemperado nitrurado (ADI) a la fatiga de contacto. En *Congreso Cubano de Ingeniería Mecánica. La Habana, Cuba. 2000*.
8. HOUBAERT IRMEN, Y. *Fundamentos del comportamiento mecánico de los materiales metálicos*. Universidad de Gante. Bélgica, 1994.
9. MEDEIROS, J. T. N. "Fadiga de Contato e Mapa de Desgaste de Discos Metálicos Não Conformes Solicitados por Contato de Rolamento Cíclico". *Boletim Técnico da Escola Politécnica da USP*. Brasil. 2002.
10. KNOTT, J. F. B. *Fundamentals of Fracture Mechanics*. Department of Metallurgy and Materials Science, Cambridge University, 1973.
11. FIRRAO, D. "Relation between fatigue crack initiation and propagation, toughness and microstructure in large steel blooms for automotive plastic molds". *International Journal of Fatigue* 2007. vol. 29, p. 1880-1884.
12. HUANG, X. "Simplified three-dimensional model for fatigue crack initiation". *Engineering. Fracture Mechanics*. 2007. vol. 74, p. 2981-2991.

### **Carlos Figueroa Hernández<sup>1</sup>, Carlos Diez Cicero<sup>2</sup>, Urbano Ordoñez Hernández<sup>3</sup>.**

1, 3 Departamento de Tecnología y Construcción de Maquinarias. Facultad de Ingeniería Mecánica  
Instituto Superior Politécnico "José Antonio Echeverría" – CUJAE  
Calle 114 #11901 e/119 y 127. Marianao. La Habana. CP 19390. Cuba  
Email: [figueroa@mecanica.cujae.edu.cu](mailto:figueroa@mecanica.cujae.edu.cu) , [urbano@mecanica.cujae.edu.cu](mailto:urbano@mecanica.cujae.edu.cu)

2. Dpto. Gráfica de Ingeniería, Facultad de Ingeniería Mecánica  
Instituto Superior Politécnico "José Antonio Echeverría" – CUJAE  
Calle 114 #11901 e/119 y 127. Marianao. La Habana. CP 19390. Cuba  
Email: [cdiez@ceter.cujae.edu.cu](mailto:cdiez@ceter.cujae.edu.cu)