

# Modelación del contacto entre dos pares de dientes en las coronas de molinos de caña

## Modeling of contact between two pairs of teeth in the sugar cane mills gears

Abdel Mendoza-Fernández<sup>I</sup>, Mario Javier Cabello-Ulloa<sup>II</sup>, Juan José Cabello-Eras<sup>I</sup>,  
Rafael Goytisolo-Espinosa<sup>I</sup>, Jorge Moya-Rodríguez<sup>III</sup>

I. Universidad de Cienfuegos Carlos Rafael Rodríguez. Facultad de Ingeniería Mecánica. Cuba

Correo electrónico: [amendoza@ucf.edu.cu](mailto:amendoza@ucf.edu.cu)

II. Hochschule Karlsruhe-Technical University. Faculty of Mechanical Engineering and Mechatronics. Karlsruhe, Germany.

III. Universidad Central Marta Abreu de Las Villas. Facultad de Ingeniería Mecánica. Cuba

Recibido: 28 de noviembre de 2012

Aceptado: 25 de junio de 2013

---

### Resumen

En el trabajo se propone un mecanismo equivalente para la modelación del funcionamiento de las coronas de molino de caña de azúcar cuando teóricamente hay dos pares de dientes en contacto. A través del análisis de movilidad del mecanismo se demuestra que no es posible el contacto simultáneo entre dos pares de dientes y que el coeficiente de recubrimiento en estos engranes es igual o menor que la unidad. A partir de los resultados del análisis cinemático del contacto entre un par de dientes, y combinándolo con la modelación del contacto entre dos pares de dientes se demuestra que el coeficiente de recubrimiento real en estos engranajes es menor que la unidad y se producen impactos entre los dientes al inicio del contacto.

**Palabras claves:** molinos de caña, coronas de molinos, coeficiente de recubrimiento, engranajes.

### Abstract

The paper proposes an equivalent mechanism for modeling the functioning of the crowns of sugar cane mill when theoretically there are two pairs of teeth in contact. Through mobility analysis of the mechanism is demonstrated that is not possible the simultaneous contact between two pairs of teeth and that the coating coefficient of these gears is equal or less than unity. Combining kinematic analysis results for the contact between a pair of teeth with the modeling the contact between two pairs of teeth, it is demonstrated that gear ratio of these gears is less than unity and impacts occur between the teeth at the start of contact.

**Key words:** sugar cane mills, sugar cane mills gears, contact ratio, gears.

## Introducción

El molino de caña de azúcar es una de las principales instalaciones de la industria azucarera, en la que tiene la función de extraer el jugo a la caña de azúcar. Fueron introducidos con la configuración actual desde finales del siglo XIX, a lo largo del siglo XX su diseño se perfeccionó notablemente con el desarrollo de los elementos motrices utilizados para su accionamiento, así como de los materiales y las tecnologías aplicadas en la fabricación de sus partes.

Su principio de funcionamiento consiste en comprimir un colchón de caña previamente preparado entre varias mazas, generalmente tres, como quiera que el grosor del colchón de caña es variable la maza superior fluctúa durante la molienda; haciendo variable la distancia entre ejes de las mazas y de los mecanismos encargados de accionarlas

La actividad de investigación ha tenido un papel importante para el desarrollo de los molinos de caña, fundamentalmente en el perfeccionamiento de los esquemas de análisis y los métodos de cálculo utilizados para el diseño de sus elementos. Sin embargo en la literatura especializada se reconoce que aún existe un grado de empirismo en su diseño e insuficiencias en los esquemas de análisis [1,2,3,4], lo que constituye una de las causas de que durante su explotación se presenten frecuentemente fallas sorpresivas; que producen importantes afectaciones económicas a las fábricas de azúcar [5,6].

Los elementos que fallan con mayor frecuencia son los ejes (guijos) que soportan las mazas, particularmente en el que se instala la maza superior. Estas fallas ocurren por fatiga y han sido investigadas con el objetivo de esclarecer las causas de su ocurrencia, establecer métodos de cálculo que permitan predecir la vida remanente de los guijos al detectarse una grieta y evaluar la factibilidad de su reparación [7,8,9]. En estos trabajos se aplica la Mecánica de la Fractura siendo esencial determinar con la mayor aproximación posible las fuerzas internas y las tensiones que se producen en las secciones analizadas en el guijo.

En mediciones de campo de la demanda de potencia en motores que accionan molinos de caña se ha evidenciado que en su trabajo se producen cargas dinámicas significativas [10]. Sin embargo en los trabajos dedicados al estudio de las roturas en los guijos de los molinos de caña no se toman en cuenta, ya que no se han desarrollado los esquemas de análisis que permitan determinarlas e incluirlas en los métodos de cálculo.

Las causas fundamentales de la aparición de cargas dinámicas durante el trabajo de los molinos de caña son: la utilización de acoplamientos cuadrados para la entrada del movimiento al molino, la aplicación de coronas de molino con perfil no evolvente para transmitir el movimiento entre las mazas y el efecto de la flotación de la maza superior durante la molienda [11].

El estudio del funcionamiento de las coronas de molino y el desarrollo de los métodos de cálculo para determinar las cargas dinámicas que se producen en su funcionamiento es complejo debido a dos causas fundamentales:

- el perfil de sus dientes se traza mediante arcos de círculo por lo que su relación de transmisión instantánea no es constante.
- la distancia entre centro es variable como resultado de la flotación de la maza superior del molino.

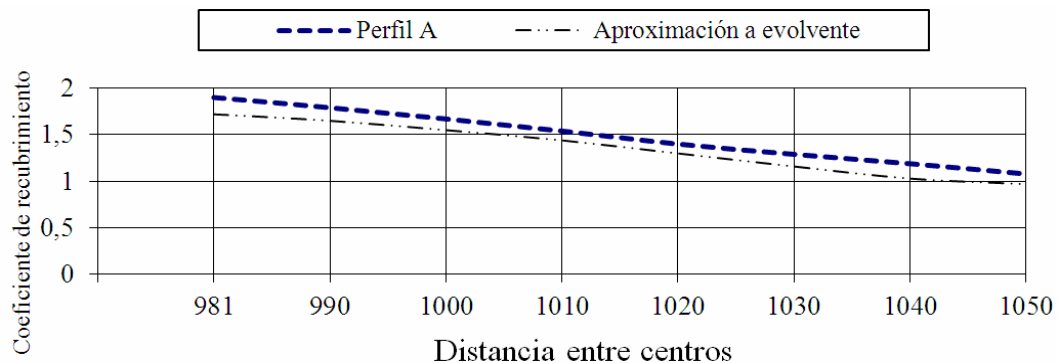
Se han desarrollado los esquemas de análisis requeridos para modelar el trabajo de las coronas tomando en cuenta ambos aspectos en la etapa en que la carga es transmitida por un solo par de dientes. Esto se ha alcanzado a través de un mecanismo equivalente compuesto por tres barras que simulan el contacto entre los dientes en todo su recorrido y una corredera que simula la flotación de la maza superior. La solución de este mecanismo permite determinar la velocidad de rotación y la aceleración instantánea de las coronas a lo largo del recorrido del punto de contacto entre un par de dientes y el ángulo de contacto asociado. [12]

El presente trabajo está enfocado a complementar la modelación del funcionamiento de las coronas de molinos, proponiendo un mecanismo equivalente para la etapa del tiempo de engrane en que presuntamente deben estar dos pares de dientes en contacto y determinar el coeficiente de recubrimiento de estos engranajes.

## Materiales y métodos

El coeficiente de recubrimiento es de gran importancia para los engranajes de cualquier tipo y en la literatura especializada se registran las ecuaciones para su determinación en los de dientes de perfil de evolvente y otros de uso menos común. Su valor para engranajes de dientes rectos oscila generalmente en un 1.1 y 1.7, lo que representa que entre el 10 y el 70% del tiempo de trabajo la carga se transmite a través del contacto entre dos pares de dientes.

En el caso particular de las coronas de molinos, en las que el perfil de los dientes es trazado a través de arcos de círculo y su distancia entre centros fluctúa; se han desarrollado estudios para determinar su coeficiente de recubrimiento; tanto aproximando su perfil a un engranaje de evolvente equivalente como teniendo en cuenta la forma real de los dientes. En la figura 1 se muestran los resultados obtenidos por ambas aproximaciones para distintas distancias entre centros y un par de coronas de perfil A.



**Fig. 1.** Variación del coeficiente de recubrimiento con la distancia entre centros. Fuente [7]

En el gráfico se puede apreciar que la diferencia del resultado obtenido con ambos modelos es menor del 10 %, y en ambos casos el coeficiente de recubrimiento toma valores entre 1 y 1,7.

El mecanismo equivalente que se propone para modelar el trabajo de las coronas de molino cuando el contacto se produce entre dos pares de dientes, parte del mismo principio físico del utilizado para simular el contacto entre un solo par de dientes. Como el perfil de los dientes se traza a través de arcos de círculos el contacto instantáneo entre ellos se puede evaluar como el contacto entre dos cilindros de radio igual al de trazado del perfil. El punto de contacto necesariamente deberá estar sobre la normal común a ambos cilindros y a una distancia del centro de trazado de cada cilindro igual a su radio.

En la figura 2 se puede apreciar el mecanismo equivalente propuesto para la etapa en que el contacto se produce entre dos pares de dientes. Este consiste en la superposición de dos mecanismos equivalentes para el contacto entre un par de dientes, uno formado por las barras "OF", "FA" y "AC" y otro formado por las barras "OG", "GB" y "BC".

Los ángulos entre las barras "OG" y "OF" y entre las barras "CB" y "CA" son iguales ya que las coronas tienen igual número de dientes y tienen un valor igual al ángulo de paso de estas ( $\varphi = 2\pi/17$  dientes = 0.36 rad), por lo que se constituyen dos elementos, "OGF" y "CBA". La corredera "H" tiene la función de considerar el movimiento de flotación de la maza superior.

El mecanismo equivalente está entonces compuesto de 6 elementos: el bastidor, los elementos "OGF" y "CBA", las barras "GB" y "FA" y la corredera "H". Estos se interconectan mediante 7 pares cinemáticos de primera clase, las articulaciones C, B, A, G, F, O y el par de deslizamiento H.

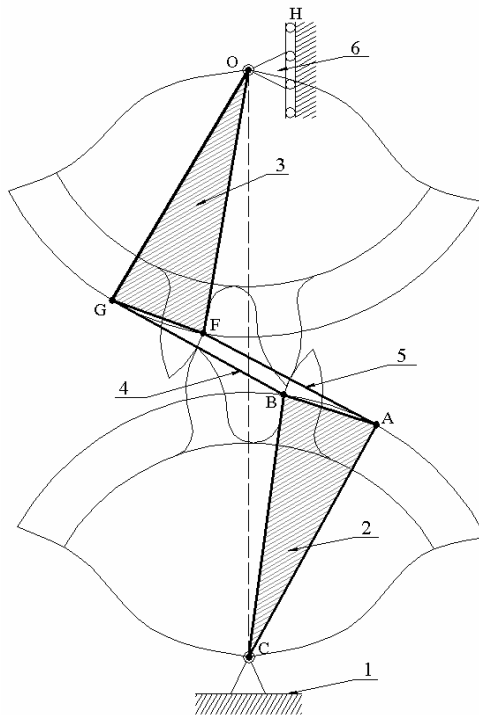


Fig. 2. Mecanismo equivalente para el contacto entre dos pares de dientes engranados

## Resultados

El primer paso en el estudio de los mecanismos planos es la determinación de su grado de movilidad, esto se realiza a través de la ecuación de Grübler para mecanismos planos [12].

$$W = 3 \cdot (n - 1) - 2 \cdot p_i - p_s = 3 \cdot (6 - 1) - 2 \cdot 7 = 1 \quad (1)$$

Donde:

W - grado de movilidad del mecanismo.

n - número de elementos del mecanismo.

$p_i$  - número de pares cinemáticos superiores.

$p_s$  - número de pares cinemáticos inferiores.

Del análisis se obtiene que el grado movilidad del mecanismo equivalente para el contacto entre dos pares de dientes en las coronas de molino es igual a la unidad, por lo que el mecanismo solo podrá moverse en una dirección, en este caso corresponde al movimiento lineal en la corredera H.

Este resultado es de singular importancia ya que al demostrar que el mecanismo equivalente no puede rotar alrededor de los centros "O" y "C", se demuestra igualmente que no se produce el contacto entre dos pares de dientes simultáneamente durante el funcionamiento de las coronas de molinos. Lo que significa que contrariamente a lo aceptado y publicado anteriormente [7], el coeficiente de recubrimiento en las coronas de molinos no puede ser mayor que la unidad y que siempre la carga es transmitida por un solo par de dientes.

Lo que ocurre en la práctica es que el contacto se produce entre el par de dientes en el que por la posición de su punto de contacto la barra FA o GB tenga una longitud igual a la suma de los radios de trazado de los perfiles.

En la figura 3 se representa el engrane entre las coronas de molinos en la posiciones de inicio y fin del contacto entre los dientes.

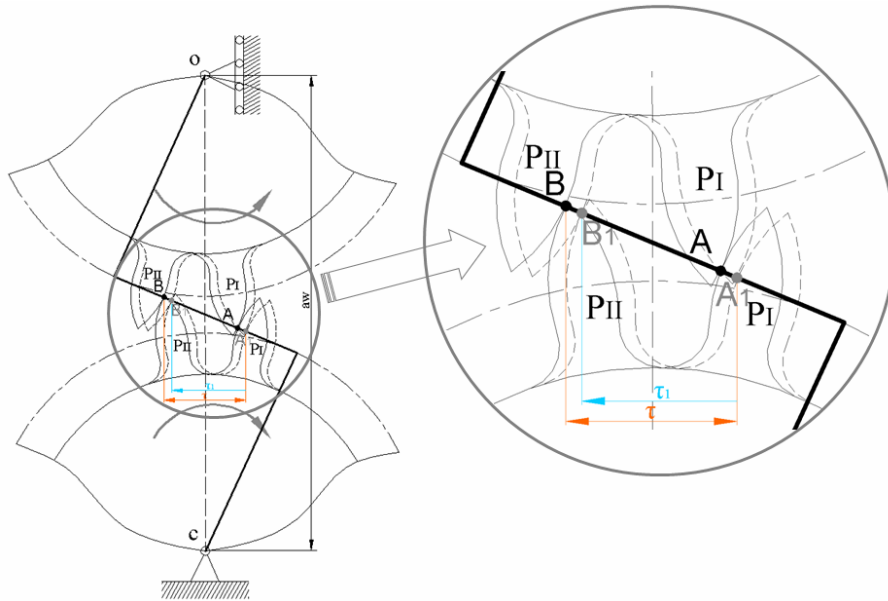


Figura 3. Representación inicio y fin del contacto entre los dientes de las coronas de molinos

Cuando el par de dientes  $P_{II}$  va a iniciar el contacto en el punto "B", el par de dientes  $P_I$  se encuentra en contacto en el punto "A" desplazado un ángulo igual al ángulo de paso de la corona ( $0,36$  rad). Cuando el par de dientes  $P_I$  va a finalizar el contacto en el punto "A<sub>1</sub>" el par de dientes  $P_{II}$  se debe encontrar en contacto en el punto "B<sub>1</sub>".

El ángulo de rotación de la corona superior desde el inicio teórico del contacto de un par de dientes cualquiera en el punto B y su finalización en el punto A1 es el ángulo teórico de contacto, se denomina ( $\tau$ ) y se determina mediante el modelo cinemático para el contacto de un solo par de dientes. [13]

En la figura 4 se muestra el comportamiento de la velocidad instantánea de rotación de la corona conducida durante el contacto entre un par de dientes, calculado para coronas de Perfil "A", con una distancia entre centro de  $1.04$  m y una velocidad de la corona conductora de  $1.0472$  rad/s ( $10$  r/min). El ángulo de rotación en el que teóricamente se produce el contacto ( $\tau$ ) para estas condiciones es de  $0.45$  rad y se representa en el eje horizontal. El signo negativo en el eje vertical obedece a que la corona conducida rota en dirección inversa a la conductora.

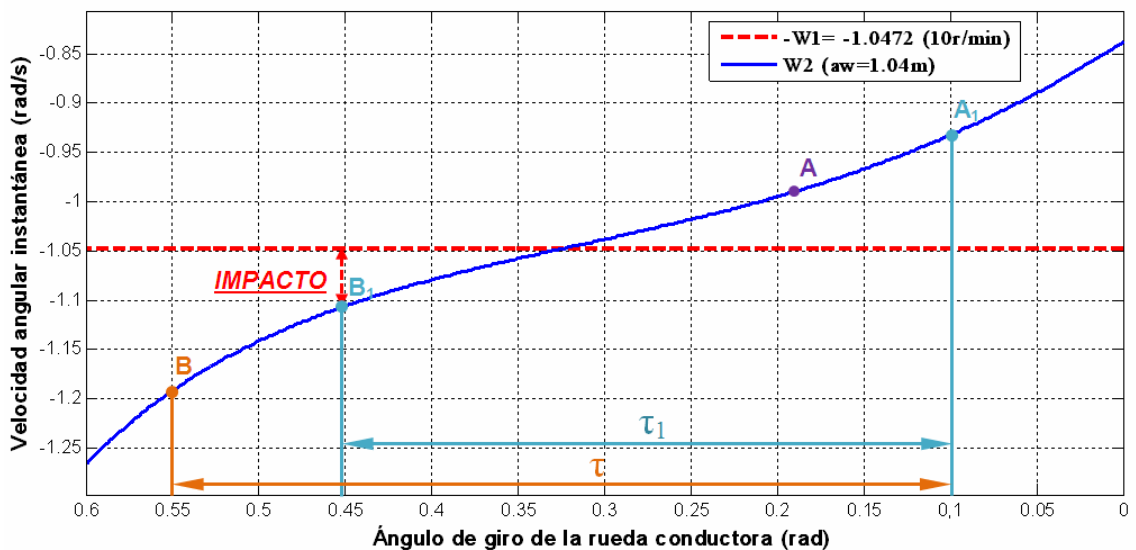


Fig. 4. Comportamiento de la velocidad angular instantánea de la rueda conducida. Fuente: [12] y elaboración propia

Primeramente se ubican los puntos “B” y “A1” donde teóricamente se inicia y termina el contacto entre un par de dientes y que enmarcan el ángulo de contacto teórico ( $\tau$ ) de 0,45 rad.

Cuando el par de dientes  $P_{II}$  entra a la zona de contacto, el punto de contacto “B” tiene un valor sobre el eje vertical que representa la velocidad de rotación instantánea de la corona y es de -1.14 rad/s. En esa posición el punto de contacto “A” correspondiente al par de dientes  $P_I$ , se encuentra desplazado sobre en el eje horizontal un ángulo ( $\tau$ ) igual a 0.36 rad, la velocidad de rotación instantánea de la corona conducida en esa posición es de -1.038 rad/s. En esta caso no se puede producir el contacto en el punto “B” ya que la velocidad debería tener la corona conducida para permitirlo (-1.14 rad/s) es menor que la que realmente tiene (1.038 rad/s) dada por la velocidad del punto de contacto “A” entre el par de dientes  $P_{II}$  que es el que transmite la carga.

Cuando el par de dientes  $P_I$  termina el contacto en el punto “B<sub>1</sub>”, la velocidad de rotación instantánea de la corona conducida es de -0.955 rad/s. El punto de contacto “B<sub>1</sub>” se ubica retrasado un ángulo ( $\tau$ ) igual a 0,36 rad y la velocidad instantánea de rotación de la corona conducida en esa posición es de -1.038 rad/s. Se concluye entonces que al abandonar el contacto el par de dientes  $P_I$  la velocidad instantánea de rotación de la corona conducida (-0.955 rad/s) es mayor que la que teóricamente debería tener para que haya contacto en la posición B<sub>1</sub> del punto de contacto (-1.038 rad/s) por lo que al salir del contacto el par de dientes  $P_I$ , el para  $P_{II}$  aún no ha iniciado el contacto.

De lo explicado anteriormente se concluye que el ángulo real de contacto ( $\tau_1$ ) entonces es el comprendido entre los puntos “B<sub>1</sub>” y “A1” , se señala tanto en la figura 3 como en la 4 y en este caso en particular tiene un valor de 0,357 rad.

### Discusión

De manera general el coeficiente de recubrimiento en los engranajes ( $\epsilon$ ) se determina por la siguiente ecuación:[12]

$$\epsilon = \frac{\tau}{\phi} \tag{2}$$

Donde:

$\epsilon$  – Coeficiente de recubrimiento de la corona

$\tau$  – Ángulo de contacto, rad.

$\phi$  – Ángulo de paso, rad.

En la tabla 1 se pueden apreciar los resultados de la determinación e coeficiente de recubrimiento teórico y real para esté caso particular siendo.

**Tabla 1.** Resultados del cálculo del Coeficiente de Recubrimiento para el caso analizado

Coeficiente de recubrimiento teórico. $\epsilon_T$	Coeficiente de recubrimiento real. $\epsilon_R$
$\tau = 0,45$ rad	$\tau_1 = 0,357$ rad
$\phi = 0,36$ rad	$\phi = 0,36$ rad
$\epsilon_T = 1,25$	$\epsilon_R = 0,991$

Cuando el par de dientes  $P_I$  abandona el contacto la corona conducida es frenada por la fricción entre la maza y el colchón de caña, la corona conductora la impacta y la acelera hasta la velocidad instantánea requerida para iniciar el contacto en el punto B<sub>1</sub>. La magnitud de este impacto es señalado en la figura 3 en color rojo y la aceleración que produce puede ser determinada a través de los modelos matemáticos ya desarrollados y resueltos. [11]

Para validar los resultados obtenidos se realizó la modelación del engrane de las coronas de molinos en el software *INVENTOR* 2011, esta se realizó para coronas de perfil “A” a igual distancia entre centros que la utilizada para obtener los resultados expuestos anteriormente. En la figura 5 se muestra la posición en que termina el contacto entre el par de dientes que transmite la carga apreciándose claramente que el par de dientes siguientes aún no ha iniciado el contacto.



**Fig. 5** Modelación del contacto entre los dientes de las coronas de molinos en el software *INVENTOR* 2011

Es hecho de que el coeficiente de recubrimiento de las coronas de molinos sea igual o menor que la unidad, tiene como principal consecuencia que el contacto entre los dientes no sea continuo. Por lo que se produce un impacto entre estos al inicio del contacto lo que origina cargas dinámicas adicionales a las que producen las variaciones instantáneas de la velocidad y las aceleraciones correspondientes que resultan de las particularidades de la construcción del perfil de sus dientes.

Aunque las coronas de molino rotan a bajas velocidades accionan grandes masas por lo que las cargas dinámicas pueden ser significativas y su magnitud debe ser determinada para evaluar su influencia sobre otros elementos del molino.

## Conclusiones

1. Se demuestra que en las coronas de molinos no se produce el contacto entre dos pares de dientes, por lo que el coeficiente de recubrimiento en estos engranes es igual o menor que la unidad.
2. En el inicio del contacto entre los dientes de las coronas de molino se produce un impacto del diente de la corona conductora con la conducida.
3. Los modelos matemáticos ya desarrollados permiten determinar la magnitud del impacto entre los dientes para cualquier distancia entre centros.

## Referencias

1. Díaz, A. y Iglesias, C. "Bases teóricas para la fundamentación del proceso de extracción de jugo de caña de azúcar para la producción de panela". *Revista Ciencias Técnicas Agropecuarias*. 2012. vol. 21, n.º. 1, p.81-85. Consultado el: 14 de febrero de 2013. Disponible en: <http://scielo.sld.cu/pdf/rcta/v21n1/rcta10112.pdf>. ISSN 2071-0054
2. Díaz, A. y Iglesias, C. "Dinámica de la extracción de jugo a compresión de la caña de azúcar para la producción de panela". *Revista Ciencias Técnicas Agropecuarias*. 2012. vol. 21, n.º. 2, p.81-85. Consultado el: 14 de febrero de 2013. Disponible en: <http://scielo.sld.cu/pdf/rcta/v21n2/rcta14212.pdf> ISSN: 2071-0054
3. Ceballos, E., León, A. *et al.* Sinergia entre alta rugosidad superficial y ambiente corrosivo en el comportamiento a la fatiga del acero SAE 1046. *Revista Dyna*. 2008. vol. 75, n.º 154, p.91-100. Consultado el: 14 de febrero de 2013. Disponible en: <http://redalyc.uaemex.mx/pdf/496/49615411.pdf>. ISSN 0012-7353
4. Águila, Y., Casanova, F. *et al.* "Desgaste en acero de bajo carbono debido a la acción de bagazo limpio o contaminado con sílice y jugo de caña". *Revista Ingeniería y Universidad*. 2011. vol.15, n.º.2, p. 373-384. Consultado el: 14 de febrero de 2013. Disponible en: [http://www.scielo.org.co/scielo.php?pid=S0123-21262011000200005 &script=sci\\_abstract&tlng=es](http://www.scielo.org.co/scielo.php?pid=S0123-21262011000200005 &script=sci_abstract&tlng=es). ISSN 0123-2126.

5. Muzakkir, S., Hirani, H. et al. "Tribological failure analysis of journal bearings used in sugar mills". *Engineering Failure Analysis*. 2011.vol. 18, n° 8 , p. 2093–2103. Consultado el: 14 de febrero de 2013. Disponible en: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1350630711001737>
6. Arzola, N. "Valoración económica sobre la aplicabilidad de inspección ultrasónica a los árboles de los molinos de caña de azúcar para la industria azucarera cubana". *Revista Ingeniería e Investigación*. 2006. vol. 26, no.2, p. 5-9. Consultado el: 14 de febrero de 2013. Disponible en: <http://www.scielo.org.co/pdf/iei/v26n2/v26n2a01.pdf>. ISSN:2248-8723.
7. Rivas, J. S., Rodríguez, S., et al. "Análisis de la confiabilidad de los ejes de molino de caña de azúcar". *Revista Tecnura*. 2004.vol. 8, n° 15, p 45-54. Consultado el: 10 de febrero de 2013. Disponible en: <http://tecnura.udistrital.edu.co/downloads/revista15/pdf/analisis.pdf>. ISSN 0123-921X.
8. Rodríguez, S., Coronado, J. J., et al. "Predicción de la vida remanente en ejes de la maza superior de molinos de caña". *Revista Ingeniería e Investigación*. 2006. vol 26, n° 1, p 78-85. Consultado el: 10 de febrero de 2013. Disponible en: <http://www.revistas.unal.edu.co/index.php/ingeinv/article/download/14686/18678>. ISSN 0120-5609.
9. Coronado, J. "Fracture Mechanics Approach of Repaired Top Roll Shafts in Sugar Cane Mills". *Journal of the Mechanical Behavior of Materials* . 2006.vol 16, n° 6, p 419–429. Consultado el: 14 de febrero de 2013. Disponible en: [http://www.degruyter.com/dg/viewarticle/j\\$002fjmbm.2005.16.6\\$002fjmbm.2005.16.6.419\\$002fjmbm.2005.16.6.419.xml;jsessionid=DE488A596D892D428CEEFD723C4D733B](http://www.degruyter.com/dg/viewarticle/j$002fjmbm.2005.16.6$002fjmbm.2005.16.6.419$002fjmbm.2005.16.6.419.xml;jsessionid=DE488A596D892D428CEEFD723C4D733B)., ISSN 2191-0243.
10. Rosero, E. y Ramírez, J. "Modelado y control de molinos de caña de azúcar usando accionamientos eléctricos". *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial*. 2009. vol. 6, n° 3, p. 44-53 Consultado el: 17 de diciembre de 2012. Disponible en: <http://recvt.fecvt.es/index.Dhp/RIAll/articleAiew/l626>. ISSN 1697-7920.
11. Cabello, M., Cabello J. et al. "Modelación matemática de la flotación de la maza superior de los molinos de caña de azúcar". *Ingeniería Mecánica*. 2011. Vol 15, n° 1, p 44-53. Consultado el: 10 de febrero de 2013. Disponible en: <http://www.ingenieriamecanica.cujae.edu.cu/index.php/revistaim/article/viewFile/400/742>. ISSN 1815-5944
12. Myszka, D. *Máquinas y mecanismos*. 4da Ed. México: Pearson; 2012, 374 p. p. 292-296. ISBN 9786073212151
13. Cabello, M., Cabello J. et al. Modelación matemática del funcionamiento de las coronas de molinos considerando la flotación de la maza superior. *Ingeniería Mecánica*, 2011, vol 10, n° 3, p. 71-76. 14 de febrero de 2013. Disponible en: <http://scielo.sld.cu/pdf/im/v15n1/im05112.pdf> ISSN 1815-5944