

Análisis dinámico por elementos finitos del conjunto soporte-captador de alta frecuencia de un tren subterráneo

Dynamic analysis for finite elements to the support of the captator of high frequency of an underground train

Alfredo González-Becerra^I, Roberto-Andrés Estrada-Cingualbres^{II}

I. Universidad Politécnica del Oeste Mariscal Sucre. Caracas. República Bolivariana de Venezuela
Correo electrónico: amigos_de_cuba@yahoo.com

II. Universidad de Holguín. Facultad de Ingeniería. Centro de Estudios CAD/CAM. Holguín. Cuba

Recibido: 2 de agosto de 2014

Aceptado: 22 de octubre de 2014

Resumen

El objetivo de este trabajo fue la determinación del estado de los esfuerzos dinámicos en varios modelos del soporte del sistema de pilotaje automático de un tren subterráneo con el empleo del Método de los Elementos Finitos a partir de la densidad espectral de potencia de las cargas y las aceleraciones máximas determinadas con anterioridad en evaluaciones extensométricas realizadas al mismo, teniendo en cuenta las frecuencias propias de oscilación del conjunto de alta frecuencia (*High Frequency*, HF). Como resultado de esta investigación se determinó que los altos valores de tensiones que aparecieron en este elemento fueron la causa de la aparición de las grietas y su desarrollo trajo como consecuencia la aparición de elevados niveles de vibraciones, lo que conllevó al descontrol en el funcionamiento del sistema y la necesidad de su reparación o sustitución prematura. Se diseñó y analizó un nuevo modelo de soporte, más rígido, donde conjuntamente con la elevación de la resistencia, se mejora notablemente su comportamiento ante las cargas dinámicas.

Palabras claves: análisis dinámico, elementos finitos, vibraciones, transporte ferroviario.

Abstract

The objective of this work was the determination of the state of the dynamic loads in several models of the support of the system of automatic pilotage of an underground train with the employment of the Method of the Finite Elements starting from the spectral density of power of the loads and the maximum accelerations determined previously in extensometrics evaluations carried out to the same one, keeping in mind the frequencies characteristic of oscillation of the group of high frequency (HF for its initials in English). As a result of this investigation it was determined that the high values of tensions that they appeared in this element they were the cause of the appearance of the cracks and its development resulted in the appearance of high levels of vibrations, what bore to the decontrols in the operation of the system and the necessity of its repair or premature substitution. It was designed and a new model of support, more rigid, analyzed where together with the elevation of the resistance, is improves her behavior notably before the dynamic loads.

Key words: dynamic analysis, finite elements, vibrations, rail transportation.

Introducción

Los medios de transporte están expuestos a excitaciones externas tales como las fuerzas verticales en los elementos de contacto con la superficie debido a las irregularidades del terreno por el cual se desplaza, lo que produce una deformación en los cuerpos flexibles y como consecuencia, una transmisión de fuerzas hacia los demás cuerpos del sistema. Este tema es de constante interés por especialistas, los que han realizado numerables estudios aplicando diferentes métodos de mediciones y modelación numérica de estos sistemas, para conocer las magnitudes de las cargas dinámicas actuantes y disminuir su efecto sobre los diferentes elementos de los trenes rodantes.

A partir de las investigaciones que se desarrollan en [4, 13] sus autores plantean que la diversidad de irregularidades en el terreno por las que se desplazan los vehículos así como las magnitudes de estas, son uno de los factores más importantes que han de tomarse en cuenta en el análisis de un sistema vehicular.

Diversos autores en [1, 7, 8, 17], realizan diferentes estudios de señales de vibraciones al pie del carril durante el paso de un tren subterráneo, declarándose que las discontinuidades en el perfil de las ruedas, la presencia de planos en esta, las ruedas excéntricas, y el corrugado e irregularidades en el carril son el origen de fuertes vibraciones de tipo impulsivas, demostrándose la necesidad de las investigaciones en esta área.

Como bien se plantea por diferentes autores [5, 6, 9] el Método de los Elementos Finitos (MEF) es ampliamente usado en la actualidad en diferentes aplicaciones del análisis estructural con el fin de determinar el estado tensional-deformacional de los elementos que conforman las estructuras sin importar el grado de complejidad de las mismas y teniendo en cuenta inclusive, los concentradores de tensiones que puedan existir en esta; uno de los aspectos más importantes en el tratamiento de problemas estructurales bajo la acción de cargas dinámicas es la correcta determinación de las magnitudes de estas y las frecuencias con que actúan así como la determinación de la respuesta del sistema ante este tipo de entorno de cargas, así en [2, 3, 10] se determina el comportamiento estático y modal de diferentes elementos estructurales de vehículos comerciales y otros elementos componentes de equipos automotores. De igual forma en las investigaciones desarrolladas en [14, 15] se reduce el peso de un chasis, pero sólo teniendo en cuenta el estado tensional del mismo y realizan el análisis dinámico de un chasis de un ómnibus debido a las cargas en diferentes tipos de vías analizándose además el fenómeno de la resonancia, aspecto este de suma importancia y que no ha sido tenido siempre en cuenta en otros estudios.

En [11, 16], los autores evaluaron el comportamiento estructural de un acople mediante técnicas computacionales de elementos finitos, para después analizarlo una vez disminuida la sección crítica del mismo y realizar la evaluación de la vida útil de este y el análisis por elementos finitos de una llanta de aluminio para automóviles respectivamente, demostrando las potencialidades del MEF en la determinación de los esfuerzos a que están sometidos los modelos desde la etapa de investigación-desarrollo, lo que coadyuva a la obtención de modelos optimizados y la disminución del tiempo en el ciclo de desarrollo del nuevo producto.

En resumen, para poder corregir los posibles problemas de diseño que generan grietas, grandes deformaciones y finalmente la falla de los elementos estructurales sometidos a cargas variables en el tiempo, es imprescindible determinar el valor máximo de las cargas para evaluar la resistencia del elemento y determinar las posibles causas de la rotura y se debe tener en cuenta las características vibratorias del mismo y las cargas actuantes.

El sistema de pilotaje automático es el encargado de comandar, controlar y supervisar el movimiento de los trenes subterráneos, y tiene en cuenta el factor seguridad de los usuarios del Metro, proporciona información al tren en relación con las diferentes variantes que influyen sobre él, tales como: velocidad de desplazamiento, aceleración de los trenes en cada tramo de la vía, frenado, apertura y cierre de puertas; además, se encarga de uniformizar la marcha de los trenes, manteniendo un respeto riguroso del horario, un mejor aprovechamiento del material rodante y regulación óptima del tráfico e intervalo mínimo entre vehículos, se encuentra ubicado en los extremos del tren, colocado uno a cada lado en la parte inferior trasera del bogue, instalándose a este a través de un soporte metálico.

El sistema está sometido a un alto dinamismo producto a las irregularidades de la vía por la cual circula el tren y las que inducen las superficies planas que se van produciendo en la rueda del mismo debido al frenado y patinaje de esta, lo que trae como consecuencia la aparición prematura de microgrietas las que al desarrollarse aceleradamente producen el fallo del soporte mucho antes de completar su vida útil y un trabajo ineficiente y no fiable del conjunto HF (*High Frequency*).

En este trabajo se realiza la determinación del estado de los esfuerzos dinámicos en un modelo de soporte del sistema de pilotaje automático de un tren subterráneo, con el empleo del MEF a partir de la densidad espectral de potencia de las cargas y las aceleraciones máximas determinadas en las

evaluaciones extensométricas realizadas al mismo con anterioridad por otros investigadores, se tienen en cuenta las frecuencias propias de oscilación del conjunto HF con el objetivo de determinar las causas de la aparición de las microgrietas y proponer soluciones ingenieriles para erradicar esta problemática

Métodos y Materiales

El soporte original objeto de esta investigación, reúne las siguientes especificaciones técnicas: el material corresponde a un acero estructural al carbono A-569, con un espesor de lámina de 4 mm.

Propiedades mecánicas del material:

Resistencia última = 365 MPa.

Límite elástico = 250 MPa.

Coefficiente de Poisson = 0,29

El soporte consta de varios orificios, tres de los cuales se utilizan para la fijación del captador HF al primero, dos sirven para interrumpir el desarrollo de las grietas y los seis restantes para la fijación del soporte a la estructura del bogue (ver Fig. 1a).

Modelo de análisis por elementos finitos del conjunto HF

Con el objetivo de realizar el análisis del soporte del conjunto HF se efectuó la construcción del modelo geométrico con la ayuda del paquete de diseño gráfico en *3D Solidworks*. Se tuvieron en cuenta los parámetros geométricos de los planos del soporte del captador y los parámetros geométricos más relevantes de este último, así como las coordenadas de acoplamiento de este al soporte. A través de las correspondientes relaciones de posición se realizó el ensamblaje de ambos elementos. El modelo de análisis por elementos finitos se confecciona con el empleo del paquete *Simulation* acoplado a *Solidworks*. Se introducen las propiedades físico-mecánicas del material utilizado en la fabricación del soporte, en el caso del captador se asume este como un elemento rígido al cual se le asigna la densidad de acuerdo al volumen geométrico del mismo ($436\,851,8\text{ mm}^3$) y su masa (5,8 kg), se asume un modelo constitutivo isotrópico elástico lineal. Se introducen las restricciones del tipo fijo a todos los desplazamientos en los orificios de unión del soporte al bogue. En el mallado del modelo se utilizan elementos tetraédricos de 10 nodos y tres grados de libertad por nodo, se aplica la opción de mallado con transición automática, con un tamaño global de los elementos de $16 \pm 0,6\text{ mm}$, obteniéndose de esta forma un modelo con 122 481 nodos y 66 861 elementos.

En la figura 1b, se aprecia el modelo numérico del conjunto HF completo, con las restricciones aplicadas a los agujeros de conexión del mismo al bogue (en color verde) y la aceleración gravitacional en rojo.

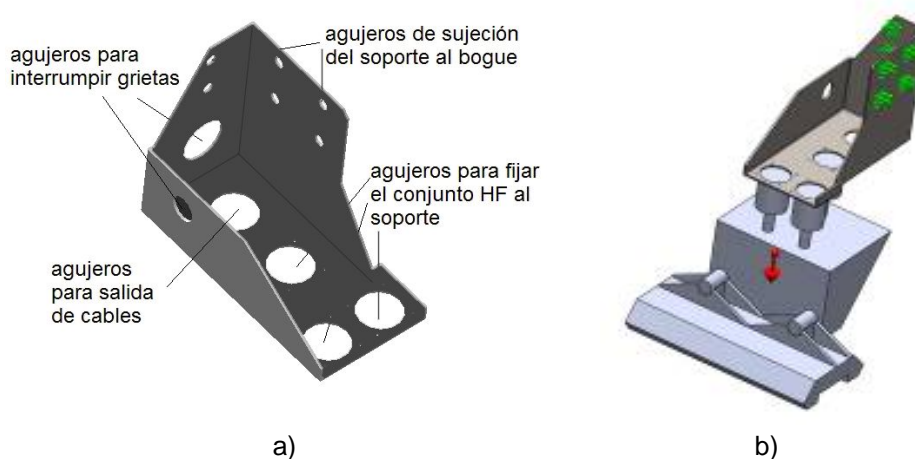


Fig. 1. a) Soporte del sistema de pilotaje automático
b) Modelo numérico del soporte y el conjunto HF

Para determinar las tensiones y los desplazamientos estáticos que se producen en el soporte producto a su propio peso y al peso del captador, se le aplica al modelo una aceleración de $9,8\text{ m/s}^2$, obteniéndose un valor de 5,3 MPa para las tensiones de Von Mises, $-0,037\text{ mm}$ de desplazamiento vertical, $-0,009\text{ mm}$ de desplazamiento transversal al riel y $0,014\text{ mm}$ de desplazamiento en el sentido del riel.

A través del análisis de frecuencias del modelo se determinan los primeros cinco valores de las frecuencias naturales y su forma modal de vibración, los cuales se recogen en la tabla 1.

Tabla 1. Frecuencias propias y participación de masa del modelo original

Número de modo	Frecuencia en Hz	Dirección X	Dirección Y	Dirección Z
1	19,722	0,570	0,017	0,002
2	34,057	0,032	0,138	0,304
3	81,266	0,011	0,001	0,081
4	206,450	0,103	0,010	0,002
5	284,790	0,002	0,450	0,018

Determinación de las tensiones y los desplazamientos máximos instantáneos en el soporte del conjunto HF

En [12], se describe las evaluaciones extensométricas realizada al soporte del conjunto HF en ambas vías del recorrido del tren, donde se midieron las aceleraciones por medio de un acelerómetro triaxial con las siguientes características: marca *Crossbow*, modelo CXL50LP3, rango ± 50 g, sensibilidad $40,0 \pm 2$ mV/g, entre otras. El acelerómetro fue fijado a través de tornillos a la cara posterior del soporte.

Las aceleraciones máximas obtenidas en dichas pruebas ocurren en el eje vertical con un valor de $350,48 \text{ m/s}^2$, las aceleraciones en los ejes ortogonales del plano horizontal son de aproximadamente dos órdenes inferiores y por ello se desprecian en el cálculo numérico.

Una vez aplicadas al modelo las condiciones de borde correspondientes, sumando la aceleración estática de $9,81 \text{ m/s}^2$ a las máximas obtenidas en la evaluación extensométrica, se procede a ejecutar el análisis pseudodinámico del mismo. Las tensiones actuantes según el criterio de Von Mises en el soporte del conjunto HF pueden apreciarse en la figura 2a, siendo su valor máximo de 975,5 MPa, superiores al límite de rotura del acero al carbono A-569 utilizado, que es de 365 MPa. Los valores máximos coinciden con la zona donde aparecieron las grietas (ver Fig. 2b). Los valores máximos de los desplazamientos son de -4,34 mm en el eje vertical, 2,34 mm transversal al riel del ferrocarril y -3,01 mm en la parte inferior del captor en el sentido del riel.

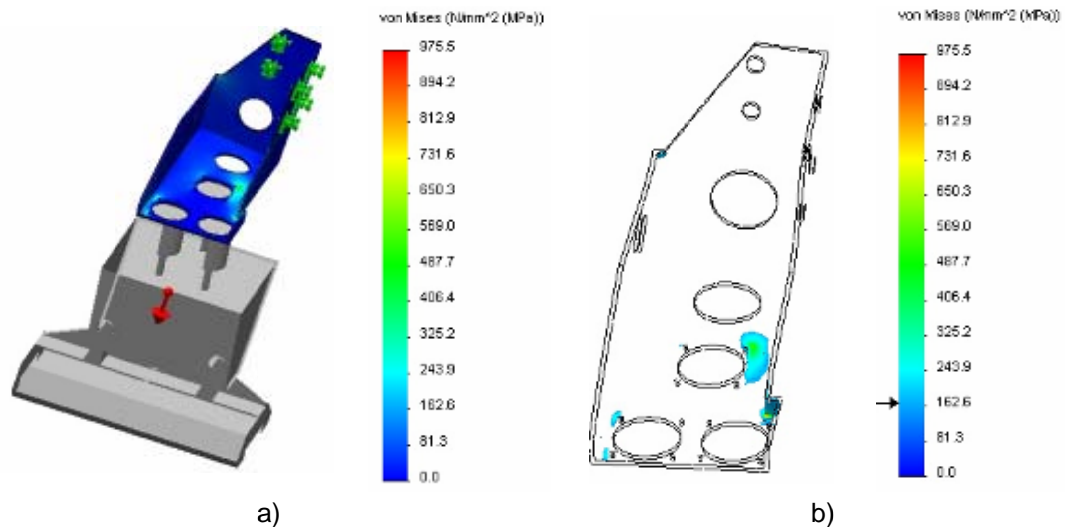


Fig. 2. a) Estado tensional bajo cargas pseudodinámicas máximas
 b) Zona en el modelo con tensiones por encima de 165 MPa

Análisis dinámico lineal de las cargas aleatorias actuantes

Para calcular la respuesta originada por cargas no deterministas se utiliza un estudio de vibración aleatoria. En un estudio de vibración aleatoria, las cargas se describen de forma estadística a través de funciones de densidad espectral de potencia (DEP). Las unidades de DEP son unidades de carga de media cuadrática en frecuencia como una función de frecuencia.

En la tabla 2 se tiene el cuadro de las densidades espectrales de potencia versus frecuencia, el cual cubre la totalidad del entorno vibratorio incluyendo las aceleraciones transitorias que actúan en el conjunto obtenidos a partir de las evaluaciones extensométricas llevadas a cabo al conjunto y presentadas en [12].

Tabla 2. Densidades espectrales de potencia versus frecuencia de las aceleraciones verticales para el conjunto captador HF

F(Hz)	10	15	40	60	85	100	140	300	500
DEP (g ² /Hz)	0,03	0,03	1,30	0,65	0,65	0,80	3,00	0,02	0,02

Los valores de la DEP de la tabla 2 son introducidos a través de la excitación de las aceleraciones en la base donde se apoya el soporte al bogue, obteniéndose la distribución en el soporte de la media cuadrática (o desviación estándar) de las tensiones de Von Mises y los desplazamientos, los cuales se muestran en la tabla 3).

Tabla 3. Valores de probabilidad de ocurrencia de las tensiones de von Mises y los desplazamientos en el soporte del captador HF

Magnitud	Valores de probabilidad de ocurrencia		
	Para el 68,27 % de los casos	Para el 95,45 % de los casos	Para el 99,73 % de los casos
Tensiones de von Misses (MPa) (tensión media igual a 5,3)	De -299,7 a 310,3	De - 604,7 a 615,3	De -909,7 a 920,3
Desplazamiento vertical (mm) (estático igual a -0,037)	De -0,907 a 0,833	De -1,777 a 1,703	De -2,647 a 2,573
Desplazamiento transversal (mm) (estático igual a -0,009)	De -0,749 a 0,731	De -1,489 a 1,471	De -0,231 a 2,211
Desplazamiento longitudinal (mm) (estático igual a 0,014)	De 0,436 a 0,464	De 0,886 a 0,914	De 1,336 a 1,364

Resultados y Discusión

En el soporte, los valores máximos instantáneos de las tensiones de von Mises resultaron iguales a 975,5 MPa, así como, los valores probabilísticos de las tensiones de von Mises son iguales a 920,3 MPa para un 99,7 % de probabilidad de ocurrencia, superando en ambos casos el Límite de Resistencia Último del acero al carbono A-569 igual a 365 MPa. Esta es la causa de la aparición de las microgrietas en el soporte durante los primeros períodos de explotación del tren en sus condiciones normales de trabajo. Era necesario el diseño de un nuevo modelo de soporte donde se corrijan estas deficiencias.

El nuevo modelo que se diseñó debió cumplir con las siguientes características:

- Deben mantenerse los requisitos de funcionalidad referidos al montaje del conjunto HF en el soporte, por lo cual deben tenerse en cuenta las restricciones de carácter geométrico en el mismo.
- El soporte debe resistir el valor de las cargas máximas que actúen producto al dinamismo que inducen los valores permisibles de las irregularidades de la vía y el estado de las ruedas.

Teniendo en cuenta estas premisas se diseñó una nueva variante más rígida del soporte del conjunto HF, el cual se fabricará a partir de una plancha del mismo material con un espesor de 4 mm en todas sus paredes, introduciéndose un pliegue en el lateral posterior con el objetivo de fijar el mismo a las paredes del bogue mediante dos tornillos, restringiendo los desplazamientos de esta parte del soporte.

De forma personalizada se introducen las propiedades físico-mecánicas del material utilizado en la fabricación de este tipo de soporte, se introducen las restricciones que fijan el modelo y se introducen las aceleraciones de igual forma que al modelo anterior.

En el mallado del modelo se utilizan igualmente elementos tetraédricos de 10 nodos y tres grados de libertad por nodo, se aplica la opción de mallado con transición automática con un tamaño global de los elementos de $16 \pm 0,6$ mm, obteniéndose de esta forma 82 696 nodos y 47 771 elementos.

Las tensiones y los desplazamientos estáticos que se producen en el nuevo soporte producto a su propio peso y al peso del captador, son ahora iguales a: 2,7 MPa las tensiones de Von Mises, 0,003 mm de desplazamiento vertical, 0,004 mm de desplazamiento transversal al riel y 0,001 mm de desplazamiento en el sentido del riel.

El análisis de las tensiones pseudodinámicas del modelo propuesto, producto a la aceleración vertical máxima de $360,29 \text{ m/s}^2$ dan como resultado 98,3 MPa según criterio de Von Mises (ver Fig. 3).

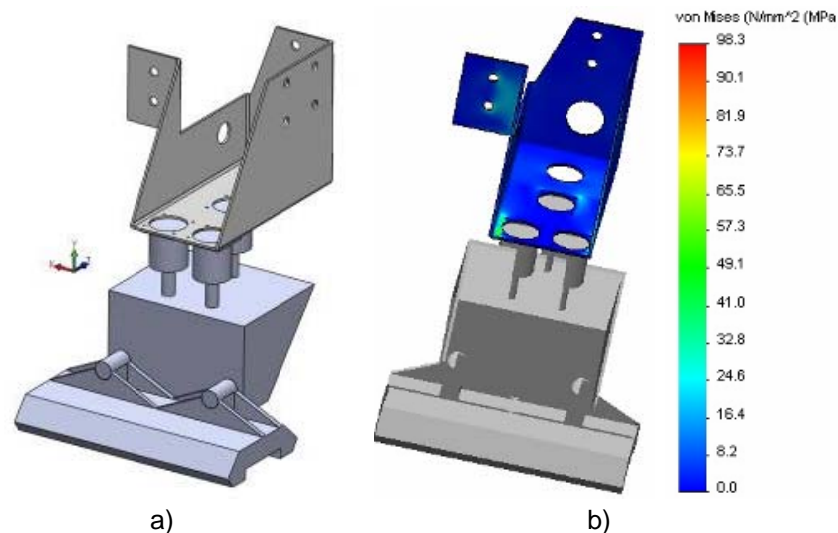


Fig. 3. a) Modelo 3D del nuevo soporte propuesto b) Estado tensional bajo cargas máximas del nuevo modelo propuesto

En la misma se observa una disminución notable en el valor máximo de las tensiones, trabajando el modelo con un coeficiente de seguridad respecto al límite de elasticidad del material del soporte de 2,54, además de una mejor redistribución del estado tensional de este, apareciendo las tensiones máximas ahora en el extremo frontal, repartidas de manera simétrica. Los desplazamientos máximos que se producen en el mismo son iguales a: 0,11 mm en sentido vertical, 0,14 mm en uno de los ejes horizontales y 0,05 mm en la parte inferior del captor en el sentido del riel.

A través del análisis de frecuencias del modelo se determinan los primeros cinco valores de las frecuencias naturales y su forma modal de vibración, los cuales se recogen en la tabla 4.

Tabla 4. Frecuencias propias y participación de masa del nuevo modelo

Número de modo	Frecuencia en Hz	Dirección X	Dirección Y	Dirección Z
1	64,048	0,205	0,027	0,272
2	73,178	0,321	0,025	0,074
3	150,00	0,001	0,001	0,002
4	235,46	0,129	0,001	0,021
5	395,57	0,008	0,392	0,089

Los valores de la DEP de la tabla 2 son introducidos a través de la excitación de las aceleraciones en la base donde se apoya el soporte al bogue en el nuevo modelo propuesto, obteniéndose la distribución en el soporte de la media cuadrática (o desviación estándar) de las tensiones de Von Mises y los desplazamientos, los cuales se muestran en la tabla 5 y la figura 4.

Tabla 5. Valores de probabilidad de las tensiones de Von Mises y los desplazamientos en el soporte del captador HF

	Valores de probabilidad de no excedencia		
	Para el 68,27 % de los casos	Para el 95,45 % de los casos	Para el 99,73 % de los casos
Tensiones de von Misses (MPa) (tensión media 2,7)	De - 37,1 a 42,5	De - 76,9 a 82,3	De -116,76 a 122,10
Desplazamiento vertical (mm) (estático 0,003)	De - 0,183 a 0,177	De - 0,363 a 0,357	De - 0,543 a 0,537
Desplazamiento transversal (mm) (estático 0,004)	De - 0,214 a 0,206	De - 0,424 a 0,416	De - 0,634 a 0,626
Desplazamiento longitudinal (mm) (estático 0,001)	De - 0,044 a 0,046	De -0,089 a 0,091	De -0,134 a 0,136

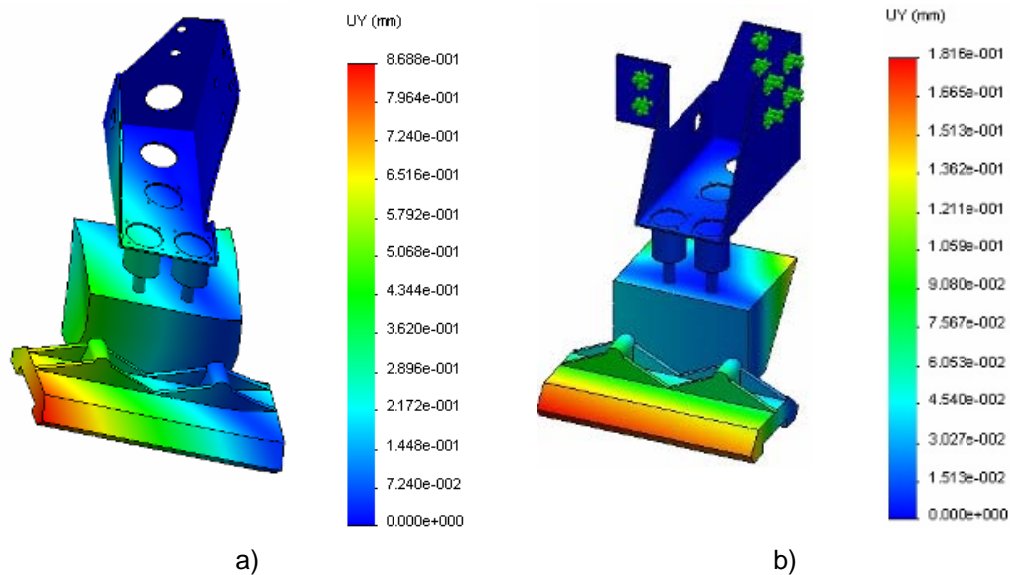


Fig. 4. Distribución en el soporte de la media cuadrática (o desviación estándar) del desplazamiento vertical en el conjunto HF a) Modelo original b) Modelo nuevo

Conclusiones

La región en el modelo original donde aparecen los valores máximos de las tensiones coincide con la zona donde surgen las grietas prematuras en el soporte fabricado nacionalmente, lo cual corrobora la validez del modelo de análisis por elementos finitos confeccionado.

El valor máximo de las tensiones en el modelo original supera en 2,67 veces las tensiones últimas del acero al carbono A-569, lo cual es indicativo de ser la causa del agrietamiento brusco del soporte al iniciarse el servicio del mismo.

El nuevo soporte propuesto, más rígido, posee un coeficiente de seguridad de 3,72 respecto al límite de resistencia a la tracción del material a emplear en la fabricación del mismo, existe una reducción considerable de los desplazamientos que se producen lo que favorece el funcionamiento estable del conjunto HF.

Con la nueva configuración geométrica del soporte se eliminan diferentes concentradores de tensiones, posibles focos de rotura por fatiga.

Referencias

- Balach JM, Cotella NG, Bruno MM, Corti HR, Miras CM. Obtención de la respuesta vibratoria vertical de vías férreas mediante modelos numéricos. *Revista Iberoamericana de Ingeniería Mecánica*. 2013;17(1):03-15. ISSN 1137-2729.
- Colomina FJ, Masiá J, Esquerdo TV, F DJ. Modelado estructural de componentes de bastidores de vehículos pesados mediante el Método de Elementos Finitos. *Información Tecnológica*. 2006;15:27-34. ISSN 0718-0764.
- Chagoyén MC, Álvarez PC, Brito FY, Moya RJ, Chagoyén MEL. Comportamiento estático y modal del chasis de un ómnibus modernizado. *Ingeniería Mecánica*. 2013;16:161-70. ISSN 1665-7381.
- Dai L, Wu J. Stability and vibrations of an all-terrain vehicle subjected to nonlinear structural deformation and resistance. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. 2006;12:72-82. ISSN 1007-5704.
- Dhandapani NV, Mohan K, Debnath K. Static analysis off-high way vehicle chassis structure for the effect of carious stress distributions. *European Journal of Scientific Research*. 2012;73:497-503. ISSN 1450-216X.
- Estrada CR, Ricardo AC, Pérez PR. Análisis dinámico del mecanismo paralelogramo del cortacogollo desfibrador para la cosechadora cañera cubana CCA-5000. *Revista Ciencias Técnicas Agropecuarias*. 2013;22:22-31. ISSN 1010-2760.
- Elkin GFS, Salvador CF, Lluïsa JN. Evaluación de la severidad de un plano en la superficie de rodadura de las ruedas de un tren. *Revista Facultad de Ingeniería de la Universidad de Antioquia*. 2012;16(65):180-90. ISSN 1405-7743.

8. Flores SE, Cardona I, Foix S, Jordi NL. Análisis en tiempo y frecuencia de señales de vibración tomadas al pie del carril durante el paso de un tren. *Scientia Et Technica*. 2007;XIII:243-7. ISSN 0122-1701.
9. Franck G, Gennaro S, Lonardi B, Eichhorn J, Bruno A. Análisis dinámico de un chasis de semirremolque de servicio pesado *Mecánica Computacional*. 2009;XXVIII:503-17. ISSN 1666-6070.
10. García De La Figal CJ, Marrero OS. Análisis dinámico de carcasa de caja de velocidad. *Ingeniería Mecánica*. 2011;14:151-9. ISSN 1665-7381.
11. García JI, Burbano JC, Coronado JJ. Análisis de la vulnerabilidad de la resistencia mecánica de un acople usado en trenes cañeros. *Revista DYNA, Facultad Nacional de Minas*. 2009;76:159-67. ISSN 0012-7353.
12. González BA, Estrada CR. Análisis dinámico al soporte del captador de alta frecuencia de un tren subterráneo. En: VI Conferencia Científica Internacional. Holguín, Cuba. p. 345-54. ISBN 978-959-16-2138-2.
13. Gonzalo R, Nelson A. Análisis del comportamiento dinámico de un vehículo con suspensión independiente tipo paralelogramo deformable y barras de estabilidad transversal. *Revista Facultad de Ingeniería de la Universidad de Antioquia*. 2013;17(67):112-25. ISSN 1405-7743.
14. Ingole NK, Bhope DV. Stress analysis of tractor trailer chassis for self weight reduction. *International Journal of Engineering Science and Technology (IJEST)*. 2011;3:7218-25. ISSN 0975-5462.
15. Kumar NH, Prasad NA, Verma D. Finite Element Analysis of Impact on Chassis & Frame of a Mini Baja Vehicle. *International Journal of Emerging trends in Engineering and Development*. 2011;3:27-33. ISSN 2249-6149.
16. Peña BF. Optimización de diseño de llantas de aluminio a flexión mediante el método de elementos finitos. *Revista Facultad de Ingeniería de la Universidad de Antioquia*. 2010;3(55):108-15. ISSN 1405-7743.
17. Zougari A, Martínez MJ, Cardona FS. Obtención de la respuesta vibratoria vertical de vías férreas mediante modelos numéricos. *Revista Iberoamericana de Ingeniería Mecánica*. 2013;17(1):03-15. ISSN 1137-2729.