Luz, *23*(3), e1462, julio-septiembre, 2024. Edición 100. III Época. ISSN 1814-151X

LUZ

https://luz.uho.edu.cu

Resolución de problemas de álgebra en secundaria a través del método de barras

Solving high school algebra problems using the bar method

Resolução de problemas de álgebra no ensino secundário através do método da barra

1Apolo Castañeda[*], ORCID: https://orcid.org/0000-0002-7284-8081

[1]Juan Luis Ramírez Lubianos, ORCID: https://orcid.org/0009-0000-0973-1625

[1] Instituto Politécnico Nacional. México.

[*]Autor para la correspondencia: acastane@ipn.mx.

Resumen

El estudio se centra en la relevancia de las representaciones matemáticas para resolver problemas de álgebra en secundaria, especialmente durante la transición a la matemática abstracta. Se examina el papel de las representaciones visuales y algebraicas en la comprensión y resolución de problemas algebraicos. La metodología usada incluyó la enseñanza con variación y el método de barras, estrategias que exploran patrones matemáticos. Algunos estudiantes tuvieron dificultades con el método de barras debido a la resistencia a dibujar y a representar relaciones de cantidades. No obstante, para otros, este método fue útil, ofreciendo un marco visual para entender la igualdad y reconocer las relaciones entre las cantidades del problema. El estudio subraya la importancia de las representaciones matemáticas y el valor de las estrategias pedagógicas que fomentan la variación y el uso de técnicas visuales en la enseñanza de matemáticas.

Palabras clave: álgebra; matemática educativa; instrucción matemática

Abstract

The study focuses on the relevance of mathematical representations for solving algebra problems in secondary school, especially during the transition to abstract mathematics. The role of visual and algebraic representations in understanding and solving algebraic problems is examined. The methodology used included teaching with variation and the bar method, strategies that explore mathematical patterns. Some students had difficulty with the bar method due to resistance to drawing and representing quantity relationships. However, for others, this method was useful, providing a visual framework for understanding equality and recognizing relationships between quantities in the problem. The study underscores the importance of mathematical representations and the value of pedagogical strategies that encourage variation and the use of visual techniques in mathematics instruction.

Keywords: algebra; mathematics education; mathematical instruction

Resumo

O estudo se concentra na relevância das representações matemáticas para a resolução de problemas de álgebra no ensino médio, especialmente durante a transição para a matemática abstrata. O papel das representações visuais e algébricas na compreensão e resolução de problemas algébricos é examinado. A metodologia utilizada incluiu o ensino com variação e o método da barra, estratégias que exploram padrões matemáticos. Alguns alunos tiveram dificuldades com o método da barra devido à resistência em desenhar e representar relações quantitativas. Entretanto, para outros, esse método foi útil, pois forneceu uma estrutura visual para a compreensão da igualdade e o reconhecimento das relações entre as quantidades no problema. O estudo ressalta a importância das representações matemáticas e o valor das estratégias pedagógicas que incentivam a variação e o uso de técnicas visuais no ensino da matemática.

Palavras-chave: álgebra; matemática educativa; ensino da matemática

Recibido:14 de julio de 2023/Aceptado: 26 de enero de 2024/Publicado: 1 de julio de 2024
Artículo original

Introducción

El álgebra representa un desafío significativo en la educación secundaria, marcando un cambio fundamental desde el manejo de números específicos y operaciones aritméticas hacia un terreno más abstracto y simbólico. Mientras que la educación primaria se centra en cálculos concretos, el álgebra secundaria introduce variables y símbolos abstractos, junto con operaciones con incógnitas que pueden ser iniciales desconcertantes y confusas para los estudiantes.

La transición a la notación alfanumérica y la manipulación de variables en las ecuaciones representan retos notables para los estudiantes de secundaria en su aprendizaje del álgebra. Sin embargo, como destacan Kaput (1989) y Kieran (2002), es importante promover el desarrollo de un "pensamiento algebraico temprano". Este enfoque de razonamiento, que puede incentivarse desde los 5 años, incluye el uso de un lenguaje simbólico y la interpretación de las relaciones entre cantidades, estructuras y cambios, así como la habilidad para generalizar, resolver problemas y hacer predicciones. Más allá de los símbolos, se apoya del uso de lenguaje natural para describir operaciones aritméticas de manera general (Pérez, 2020).

Atendiendo a la subraya la necesidad de innovar en la enseñanza del álgebra (Kaput, 1989), particularmente en el desarrollo de habilidades algebraicas desde una edad temprana, este artículo propone el uso del método de barras de Singapur como una estrategia pedagógica. Este método ayuda a la comprensión de problemas algebraicos al vincular elementos verbales y simbólicos mediante representaciones visuales, simplificando la identificación de relaciones entre variables y componentes de ecuaciones. Asimismo, el método de barras promueve la generalización matemática y facilita la transición de la comprensión verbal a la simbólica, apoyando a los estudiantes a enfocarse en la estructura de las expresiones algebraicas más allá de los procedimientos.

El método de barras de Singapur ha sido reconocido en múltiples estudios como una herramienta en la enseñanza y el aprendizaje matemático. Sevinc y Lizano (2022) lo describen como una heurística que visualiza las cantidades y sus interrelaciones, estructurando el problema de manera que guía al estudiante hacia las operaciones necesarias para resolverlo. Jiang et al. (2014) respalda su eficiencia en la resolución de problemas, destacando cómo ayuda con el cálculo sin comprometer el razonamiento proporcional y algebraico. Baysal y Sevinc (2022) notaron que este método también contribuye a corregir errores comunes en estudiantes, como la identificación errónea de la incógnita y la formulación de ecuaciones. Ng y Lee (2009) agregan que incluso estudiantes de habilidades promedio pueden mejorar su desempeño en problemas verbales al aprender a representar la información de manera gráfica. Hoven y Garelick (2007) concluyen que aunque los estudiantes pueden enfrentar dificultades iniciales al adoptar esta herramienta visual, con práctica, la utilizan con éxito para resolver problemas.

Esta investigación tiene el propósito de analizar cómo se desarrolla el pensamiento algebraico en estudiantes mientras resuelven problemas que llevan a ecuaciones lineales. Se introduce una secuencia didáctica que integra el método de barras de Singapur dentro del marco de enseñanza con variación, un enfoque que secuencia los temas educativos para exponer a los estudiantes a una diversidad de situaciones y representaciones favoreciendo su comprensión y flexibilidad conceptual. Además, el estudio evalúa la forma en que el método de barras de Singapur puede apoyar la comprensión de las relaciones matemáticas y la generalización de patrones y estructuras.

A continuación se abordarán los referentes teóricos que sostiene la propuesta didáctica, por una parte, se analizará el pensamiento algebraico que describe las habilidades necesarias para comprender y manipular expresiones simbólicas, identificar patrones y relaciones, así como para generalizar conceptos matemáticos (Kaput, 1989; Kieran, 2002). Por otra parte, se examinarán las características del método de barras, que permite la representación visual de problemas algebraicos y favorece la relación de las diversas representaciones matemáticas.

El pensamiento algebraico temprano se compone de tres aspectos fundamentales: el pensamiento analítico, el estructural y el funcional, donde la generalización es un componente esencial que está presente en todas estas áreas. El pensamiento analítico se manifiesta en la capacidad para entender y aplicar transformaciones y equivalencias en ecuaciones, así como en la habilidad para resolverlas. Esta dimensión se apoya en una visión ampliada de la aritmética, donde el número es el principal objeto de estudio matemático.

La dimensión estructural del pensamiento algebraico se distingue por el uso intencionado de relaciones y propiedades matemáticas durante el proceso de razonamiento. Este enfoque implica la capacidad de aplicar, articular y conectar diversas propiedades matemáticas de manera consciente, las cuales constituyen la base para el desarrollo de habilidades analíticas. Se centra específicamente en el uso de estas relaciones y propiedades para generar y manipular expresiones algebraicas equivalentes.

La dimensión estructural del pensamiento matemático se divide en cuatro subdimensiones. La primera consiste en la identificación de estructuras en números y expresiones, que promueve la comprensión de expresiones aritméticas desde un punto de vista estructural, superando el enfoque meramente procedimental. La segunda, la representación estructural en operaciones numéricas, destaca la importancia de las representaciones estudiantiles como medio para expresar y validar generalizaciones operacionales, fortaleciendo la comprensión estructural. La tercera, ampliación de la dimensión estructural, busca extender el pensamiento estructural más allá de los números naturales para incluir otros dominios, como los números negativos y las fracciones. La cuarta, expansión estructural busca expandir el enfoque estructural más allá de lo numérico, considerando cómo las transformaciones numéricas y geométricas interactúan en el contexto de la equivalencia matemática.

Finalmente, el pensamiento funcional se centra en entender cómo unas cantidades dependen de otras, lo cual requiere interpretar correctamente las variables dentro de las relaciones funcionales. Esta dimensión constituye un componente fundamental en los programas actuales de estudio de álgebra, basados en la premisa de que las funciones son los objetos matemáticos centrales.

Schiefter y Jo (2022) destacan la importancia de utilizar diversas representaciones—como gráficos, diagramas, modelos físicos y narrativas—para la articulación de ideas y conceptos matemáticos. De acuerdo con estos autores, el empleo de una variedad de representaciones durante el aprendizaje matemático enriquece la comprensión de los estudiantes sobre conceptos abstractos y les permite formular y justificar generalizaciones de operaciones numéricas y argumentar sus razonamientos. En estudios iniciales en matemática educativa, como los realizados por Hiebert y Wearne (1993), es posible identificar los aportes de las representaciones en el aprendizaje de las matemáticas, en particular en esta investigación se analizó cómo el uso de balances y líneas numéricas pueden facilitar la enseñanza del concepto de igualdad y la relación inversa entre la adición y la sustracción. Este trabajo apoya la idea de que la abstracción matemática se potencia cuando los estudiantes examinan diferentes representaciones de una misma idea matemática y descubren las similitudes que forman su núcleo conceptual. La abstracción se desarrolla cuando estas representaciones se introducen secuencialmente, pero particularmente cuando se interrelacionan simultáneamente en una actividad matemática.

Continuando en esta línea, la noción de igualdad es fundamental en el estudio del álgebra ya que establece las bases para resolver ecuaciones y entender las relaciones entre variables y constantes. Esta idea se define como la equivalencia entre dos cantidades o expresiones matemáticas, es intrínseca a las propiedades de reflexividad, simetría y transitividad, y es comúnmente simbolizada por la expresión “es igual a” (Schiefter y Jo, 2022). Las investigaciones en educación matemática desde los años setenta hasta la actualidad han estado centradas en identificar esta dualidad en la percepción estudiantil del signo igual, con especial atención en su comprensión y manejo en ecuaciones que incluyen incógnitas y en cómo aplican la igualdad de forma bidireccional (Schiefter y Jo, 2022). Este interés se fundamenta en la importancia que tiene en la resolución de ecuaciones ya que en estas tareas se requiere un entendimiento profundo de la igualdad a fin de reconocer y mantener la equivalencia entre los términos de una ecuación. No obstante, la interpretación del signo igual por parte de los estudiantes no es algo trivial y puede variar y generar dificultades. Algunos estudiantes pueden mirarlo operacionalmente, como un mero comando para realizar cálculos, mientras que otros lo pueden entienden relacionalmente, como una indicación de equivalencia entre expresiones matemáticas.

Con respecto al modelo de barras, se trata de un enfoque didáctico centrado en generar la representación gráfica de relaciones matemáticas a fin de motivar la percepción y visualización de los componentes de los problemas matemáticos. Este procedimiento favorece la organización mental de ideas y apoya a la formulación de ecuaciones, así como la resolución de problemas que involucran proporciones, comparación fracciones y porcentajes (Thirunavukkarasu y Senthilnathan, 2017). Además, el uso de barras favorece el desarrollo del pensamiento algebraico al clarificar las relaciones entre las operaciones matemáticas y las cantidades involucradas en los problemas (Sevinc y Lizano, 2022) preparando a los estudiantes para enfrentar conceptos matemáticos más avanzados, como sistemas de ecuaciones y la aplicación de propiedades de equivalencia (Tiangtrong, 2020). Con estas características, el modelo de barras es un medio didáctico muy propicio para visualizar e identificar conceptos abstractos de una forma concreta y accesible, permitiendo a los estudiantes desarrollar habilidades analíticas en la resolución de problemas.

Materiales y métodos

En esta sección, se expone la metodología aplicada en este estudio. Iniciamos con una exposición de la enseñanza con variación, el enfoque metodológico adoptado para la creación de las actividades didácticas. A continuación, se describe detalladamente el diseño de la secuencia didáctica utilizada. Luego, se aborda el método empleado para definir la población de estudio. Por último, se detalla el desarrollo de las categorías de análisis que fundamentan la interpretación de los resultados. Este estudio, de carácter cualitativo, busca una comprensión profunda del pensamiento matemático de los estudiantes en el contexto de resolución de problemas con el método de barras.

La teoría de la variación, formulada por Gu et al. (2017), propone una planificación instruccional en matemáticas centrada en la presentación sistemática de casos variados. Este método ayuda a los estudiantes a discernir patrones y constantes, favoreciendo la comprensión de los objetos matemáticos y el desarrollo de conceptos científicos, al tiempo que se ignoran los aspectos irrelevantes. Según esta teoría, el aprendizaje ocurre al percibir y asimilar las diferencias y similitudes entre los elementos de un concepto. Gu et al. (2017) sostienen que el aprendizaje comienza con el reconocimiento de variaciones específicas, siendo este la base para luego identificar similitudes. La teoría distingue entre variación conceptual, que abarca la comprensión de conceptos desde diversas perspectivas, y variación procedimental, que se enfoca en el desarrollo gradual de habilidades prácticas. Ambos tipos de variación son fundamentales para fomentar el aprendizaje matemático.

La teoría señala la relevancia de identificar patrones de variación y constancia en el aprendizaje, priorizando la diferenciación conceptual sobre la simple acumulación de conocimientos. Un recurso específico utilizado en esta aproximación es el “contraste”, que compara conceptos para reforzar el aprendizaje, de manera similar a cómo se emplean contraejemplos en matemáticas para validar conjeturas y generalizaciones (Marton, 2015). No obstante, para la generalización de un concepto matemático, es imprescindible que los estudiantes interactúen con ejemplos y contraejemplos, observando similitudes y diferencias entre varias representaciones. Este proceso es vital para identificar las características comunes y captar la esencia de un concepto matemático.

Diseño de la secuencia.

La actividad didáctica, elemento central de esta intervención, consiste en una secuencia de ejercicios concebida para fomentar el pensamiento algebraico a través de la resolución de problemas que conducen al establecimiento de ecuaciones lineales. Se insta a los alumnos a utilizar el método de barras, un recurso tanto visual como analítico, para abordar los problemas presentados. Este método pretende favorecer el desarrollo de habilidades algebraicas fundamentales, la comprensión de las interacciones entre variables y las operaciones necesarias para la resolución de ecuaciones lineales. Inspirada en la teoría de la variación, la secuencia didáctica aspira a enriquecer el aprendizaje mediante la exposición a una diversidad de ejemplos, contextos y representaciones de conceptos matemáticos. Tal estrategia didáctica destaca elementos clave del contenido matemático para los estudiantes como la comprensión de la igualdad, la identificación de cantidades conocidas y desconocidas, y la idea de solución.

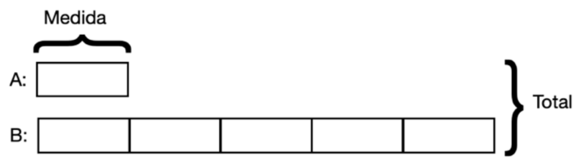
La secuencia didáctica se divide en tres grupos de casos, cada uno presentando problemas con distintas relaciones entre los datos. Se definen tres tareas básicas en para el proceso de solución del problema. En primer lugar, se aborda la identificación de valores desconocidos, lo que permite reconocer la naturaleza de la incógnita en un problema matemático. En segundo lugar, el establecimiento de una medida de referencia, se trata de una cantidad como punto inicial en el análisis de problemas matemáticos. Tercero, la identificación de relaciones entre valores conocidos y desconocidos, lo cual permite entender la dinámica entre variables y constantes en las ecuaciones. Además, se incluye la formulación de relaciones proporcionales, importante para el reconocimiento de patrones y la identificación de relaciones matemáticas. Finalmente, se enfatiza la construcción de la idea de igualdad entre cantidades, un aspecto importante en la resolución de ecuaciones y en el pensamiento algebraico. Los problemas matemáticos utilizados provienen de la obra de Baldor (2019), un destacado matemático cubano cuya influencia es ampliamente reconocida en Latinoamérica.

El primer grupo de problemas se enfoca en la acción de iterar una medida, por ejemplo: Las edades de A y B suman 48 años. Si la edad de B es 5 veces la edad de A, ¿qué edad tiene cada uno?

Para abordar esto con el método de barras, se inicia representando visualmente la edad de A con una barra única —la "medida"— y la edad de B con cinco barras contiguas del mismo tamaño, ilustrando así la quíntuple relación (Figura 1). La suma de las edades se correlaciona gráficamente con estas seis medidas equivalentes a 48 años. Matemáticamente, esto se expresa con la ecuación $x + 5x = 48$, donde "x*"* representa la edad de A. Una inspección visual revela que las seis medidas suman 48, lo cual, al dividirse, da como resultado que la "medida" única, o la edad de A, es 8 años. La edad de B se deduce por la proporción establecida, resultando en 40 años. La solución se obtiene tanto de la interpretación gráfica como de la resolución algebraica de la ecuación, concluyendo que A tiene 8 años y B, cinco veces mayor, 40 años.

Figura 1

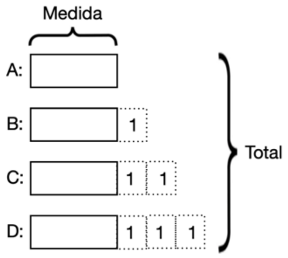
Modelo de solución a través del método de barras, problemas tipo 1



El segundo grupo de problemas plantea la iteración de una medida junto con un valor constante, por ejemplo, ¡Halla cuatro números consecutivos cuya suma sea 74!. Al abordar este problema mediante el método de barras, se inicia dibujando una barra que representa el primer número, designado como "*x*" o "medida" (Figura 2). Directamente debajo, se coloca una segunda barra del mismo tamaño para el número consecutivo a "x", añadiendo una marca punteada para indicar un incremento unitario, y así sucesivamente para los dos números consecutivos restantes. Esta disposición visualiza la secuencia: un número dado "A" y su consecutivo "B". Después, conectamos visualmente las barras para reflejar que la suma de estos cuatro números es 74. Matemáticamente, se formula la ecuación $x + (x+1) + (x+2) + (x+3) = 74$ para representar esta suma. Una inspección visual revela que existen cuatro barras idénticas y seis unidades representadas por las figuras punteadas. Un posible camino para resolver esto es realizar la operación 74-6, lo que simplifica la relación en las figuras a $4x=68$, determinando así que $x=17$. Una vez hallado el primer número, es posible determinar los números consecutivos correspondientes.

Figura 2

Modelo de solución a través del método de barras, problemas tipo 2

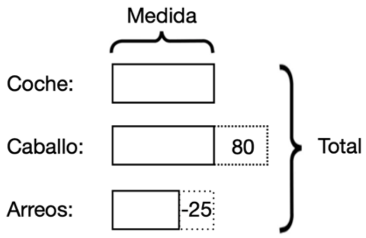


Por último, el tercer grupo de problemas se centra en definir una medida y compararla por diferencia o adición con números conocidos, por ejemplo, ¡Pagué $325 por un caballo, un coche y sus arreos. El caballo costó $80 más que el coche y los arreos $25 menos que el coche. ¡Halla los precios respectivos!.

Para resolver este problema con el método de barras, empezamos representando el costo del coche como nuestra medida de referencia, utilizando una barra que asignamos como "Coche". Luego, para el caballo, dibujamos una barra equivalente a "Coche" y añadimos un segmento punteado valorado en $80, ilustrando que el caballo es $80 más caro que el coche. Para los arreos, trazamos una barra del tamaño de "Coche" menos un segmento de $25, representando su menor costo en comparación con el coche. Finalmente, estas barras se suman para reflejar el costo total de $325. La relación entre los precios se traduce en la ecuación: $x + (x + 80) + (x - 25) = 325$. Para resolver, una estrategia es compensar la diferencia entre los $80 adicionales del caballo y los $25 menos de los arreos, resultando en un excedente de $55. Restando estos $55 de $325, simplificamos la relación a $3x = 270$. Dividiendo entre tres, hallamos que C, el costo del coche, es $90. De aquí se deduce que el caballo cuesta $170 y los arreos $65.

Figura 3

Modelo de solución a través del método de barras, problemas tipo 3



En el diseño de la actividad didáctica, se presta especial atención a los aspectos que varían, como el tipo de casos, así como lo que permanece invariable, como el procedimiento para establecer referencias y la noción de igualdad, que son esenciales para el desarrollo del pensamiento algebraico. Lejos de ver la secuencia didáctica como tareas desconectadas, se la concibe como una secuencia integrada de problemas cuya estructura colectiva impulsa la formación de una comprensión matemática unificada (Watson y Mason, 2009).

Para estructurar y analizar los resultados de la implementación de estas actividades, se han definido tres categorías analíticas clave, inspiradas en los principios teóricos subrayados en este estudio (Van, 1990). La finalidad es discernir patrones y relaciones en los datos que respondan a las interrogantes de investigación. La primera categoría, “desarrollo del pensamiento algebraico”, evalúa cómo las actividades didácticas influyen en la evolución del razonamiento algebraico de los estudiantes. Se enfatiza en aspectos relacionados con el pensamiento analítico, estructural y funcional, y se reconoce la generalización como un aspecto crucial. Además, se examina la interacción de los estudiantes con cantidades indeterminadas, variables y patrones en el marco de las tareas propuestas. Esta categoría se divide en tres descriptores específicos: “razonamiento analítico”, que alude a la capacidad de descomponer problemas complejos y analizar las relaciones entre sus partes; “abstracción y generalización”, que se refiere a la habilidad para identificar y aplicar patrones en situaciones más generales; y “manipulación de expresiones algebraicas”, que se centra en la competencia para utilizar símbolos y operaciones algebraicas eficazmente en la resolución de problemas.

La segunda categoría, denominada “Uso y Comprensión de Representaciones Matemáticas”, se centra en cómo los estudiantes utilizan e interpretan diversas representaciones matemáticas para resolver actividades didácticas. Se analizará su efectividad para facilitar el entendimiento de conceptos matemáticos y la transferencia de información entre dichas representaciones. En esta categoría, se distinguen tres descriptores clave: “Flexibilidad representacional”, que mide la habilidad del estudiante para alternar fluidamente entre representaciones gráficas, numéricas y simbólicas. “Interpretación de Modelos”, que evalúa la capacidad de comprender y extraer información relevante de las representaciones matemáticas. Finalmente “Conexión entre Representaciones”, que destaca la competencia para vincular y entender la interrelación entre diferentes representaciones, y cómo se complementan mutuamente. Por otro lado, la tercera categoría, “Características de la Estrategia Pedagógica”, reflexiona sobre la efectividad y el alcance de las estrategias de enseñanza en el desarrollo de competencias analíticas y conceptuales en matemáticas. Esta se divide en dos descriptores: “Enseñanza con Variación”, que examina las ventajas de este enfoque para el estudio del álgebra; y “Método de Barras”, que se centra en cómo esta técnica visual contribuye a la mejora en la resolución de problemas y al desarrollo del pensamiento algebraico.

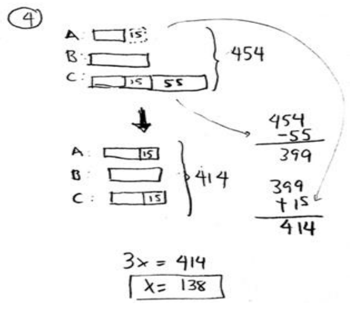
La implementación de la actividad tuvo lugar en una institución de educación secundaria pública ubicada en la zona centro de México. El profesor encargado presentó el método de barras para la resolución de problemas en una sesión introductoria previa. El estudio que se presenta se llevó a cabo durante una sesión intensiva de dos horas. Los estudiantes trabajaron en equipos de tres para fomentar el diálogo y la colaboración en la resolución de problemas, identificándose los equipos con códigos del *e1* al *e7*. La recopilación de datos se realizó mediante el análisis de las respuestas estudiantiles en hojas de trabajo impresas. Adicionalmente, se realizaron entrevistas abiertas con varios equipos para profundizar en sus procesos reflexivos y de pensamiento.

Resultados y discusión

La categoría “Desarrollo del Pensamiento Algebraico” incluye como primer descriptor el “Razonamiento Analítico”. Este se caracteriza por la capacidad de fragmentar problemas en secciones menores para analizar las conexiones entre ellas. Un ejemplo que demuestra este descriptor se encuentra en el problema propuesto al equipo 2 (e2): ¡Pedro tiene tres veces la edad de Juan, y la suma de sus edades es 40 años. Halla las edades!. Al resolverlo, el equipo 2(e2) se enfocó en encontrar la medida de referencia, la edad de Juan. Encuentran una dificultad al intentar expresar la medida debido a que se trata de una cantidad desconocida; pero finalmente logran representar esta medida a través de una barra. Posteriormente, al definir esta medida, los estudiantes vincularon otros datos del problema, utilizando nociones de proporción numérica para representar la relación de edades como “tres a uno”. Aunque la resolución directa podía ser por división, se les instruyó formular y resolver una ecuación, donde comparar las barras les ayudó a establecer una proporción visualmente. En este contexto, también es importante destacar cómo identificaron la noción de igualdad. Al trabajar con problemas del tipo 3, el equipo 5, emplearon estrategias de ajuste numérico en las barras, reflejando sumas o restas en el total para mantener la igualdad. En el problema “Dividir 454 en tres partes, sabiendo que, la menor es 15 unidades menos que la del medio y 70 unidades menos que la mayor”, el equipo trazó una configuración inicial de barras en la que resalta una de ellas con un valor de 55. Para eliminar este 55, tuvieron que restar de 454 con el fin de preservar la igualdad, simplificando así el problema y obteniendo una nueva configuración de tres barras idénticas. Esta evidencia, ilustrada en la Figura 4, muestra cómo los estudiantes le atribuyen un sentido a la igualdad a través de las transformaciones que realizan en las figuras, manteniendo al mismo tiempo la condición de igualdad en la ecuación.

Figura 4

Solución del equipo 5

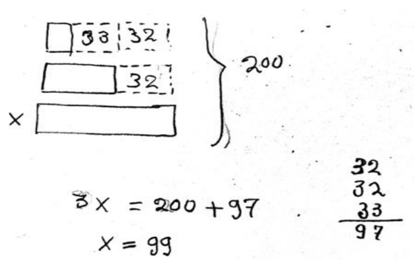


El descriptor "Abstracción y Generalización" destaca la capacidad de discernir patrones y aplicarlos en distintos escenarios. Un caso que ilustra este descriptor es el problema que plantea "Hallar cuatro números enteros consecutivos cuya suma sea 74" presentado al grupo 1. Este equipo inicialmente luchó con el concepto de "consecutivos", mostrando dificultad para visualizar la secuencia con barras. Empezaron asumiendo que los cuatro números podrían ser iguales, lo que los llevó a dibujar cuatro barras del mismo tamaño, lo cual no condujo a la respuesta correcta. Sin embargo, en un diálogo registrado, un estudiante propuso que, si una barra representaba un número, la siguiente debería incluir un cuadro adicional para representar el consecutivo. Este razonamiento les permitió comprender la naturaleza de una secuencia consecutiva, reflejando un incremento uniforme que podía aplicarse a cualquier conjunto de números enteros. Este avance evidencia la aplicación práctica de abstracción y generalización al interpretar la idea de "consecutivos" en términos de una regla de incremento constante.

El tercer descriptor, "manipulación de expresiones algebraicas", se refiere a la destreza para emplear símbolos y operaciones algebraicas. Para profundizar en este descriptor, tomamos la resolución que ofreció el equipo 4 al problema "La suma de tres números es 200. El mayor excede al del medio en 32 y al menor en 65. Halla los números". La discusión se enfocó en determinar la cantidad de "referencia", después de varios intentos decidieron que la tercera cantidad era la adecuada, bajo el argumento de que las otras dos hacían comparaciones con esta tercera. Enseguida surgió una idea para simplificar la configuración, "…completar la primera y segunda barra para hacer tres barras iguales…" tal como se observa en la figura 5, lo cual implicó sumar 32+32+ 33 al número 200, lo que condujo a la ecuación $3x = 297$ casi de forma inmediata. A través del método de barras, los estudiantes pudieron identificar las relaciones entre cantidades conocidas y desconocidas, establecer la igualdad, efectuar operaciones para mantener la igualdad y formular una ecuación.

Figura 5

Solución del equipo 4



Dentro de la segunda categoría, "Uso y Comprensión de las Representaciones Matemáticas", se evidenció la diversidad con la que los estudiantes aplican representaciones gráficas, numéricas y algebraicas en la resolución de problemas. El primer descriptor, "Flexibilidad Representacional", se refiere a la habilidad de alternar entre distintos modos de representación matemática. Este proceso se divide en tres fases clave. Inicialmente, los alumnos leen y descifran las relaciones en los enunciados. Luego, proceden a dibujar figuras para plasmar y comprender esas relaciones. En la etapa final, se traducen estas comprensiones en una ecuación algebraica. Un ejemplo se muestra en la Figura 5, donde suman diferencias entre cantidades al total. Destacan en su estrategia la habilidad de usar las relaciones mostradas en las barras como fundamento para derivar una ecuación, especialmente en la transición de una "medida" visual a la "incógnita" algebraica. En la Figura 5, esto se ejemplifica cuando designan la tercera barra como "x". Es crucial subrayar el papel dual de las barras, no solo simbolizan la información del problema, sino que también orientan la formulación algebraica.

El segundo descriptor, "Interpretación de Modelos", se relaciona con la habilidad para asignar y extraer significados de representaciones matemáticas. Más allá de la noción de medida e incógnita en la labor de los estudiantes, sobresale la construcción de equivalencias al conectar el "total" con las relaciones manifestadas en las barras. Un caso ilustrativo es la Figura 5, donde los alumnos introducen el concepto de "cantidades de referencia", explicando que estas sirven como marcadores provisionales de la medida, sin ser valores concretos. Al resolver el problema, plantean que para convertir estas cantidades en reales y completar la medida, es necesario agregarlas al total de 200, asegurando así la equivalencia. Este proceso destaca cómo el uso de representaciones auxiliares, como figuras delineadas con líneas punteadas, sirve de guía para definir la "medida" y facilita la comprensión de la equivalencia en el problema matemático.

El tercer descriptor aborda la "Conexión entre Representaciones", que es importante para vincular y facilitar la transferencia de información entre distintas formas matemáticas. Aunque la representación gráfica es fundamental en la formulación de ecuaciones, es imprescindible reconocer que diversas representaciones reflejan las relaciones entre las cantidades conocidas y desconocidas y el total del problema. Esto significa que la "medida", independientemente de si se presenta en el texto del problema, en la representación gráfica o en la ecuación, permanece constante. La habilidad para visualizar esta información a través de recursos gráficos representa un desafío significativo en estas actividades. Algunos estudiantes lograron resolver los problemas aritméticamente sin formular ecuaciones, percibiendo claramente la "medida". Sin embargo, se enfatizó la importancia de simbolizar las soluciones para promover el pensamiento abstracto. Aunque algunos alumnos prefirieron las expresiones algebraicas, evitando el enfoque gráfico, la tarea requería la utilización de barras como representación. A lo largo de la resolución de problemas, se notó que los estudiantes no se apegaban a una sola representación, sino que transitaban entre diferentes representaciones para enfocarse y discernir las relaciones en el problema. Esta flexibilidad representacional fue clave para enfrentar problemas de mayor complejidad, como los de tipo 3.

La tercera categoría, “Características de la Estrategia Pedagógica”, introduce un primer descriptor: “Enseñanza con Variación”. Este analiza cómo el planteamiento pedagógico favorece el aprendizaje del álgebra, incentivando la representación de las relaciones entre cantidades conocidas y desconocidas mediante igualdades, a través del uso del método de barras. Una constante en la resolución de problemas fue la habilidad para identificar las relaciones cuantitativas, manifestadas como proporciones (por ejemplo, 3 a 1), múltiplos o diferencias específicas. El desafío principal radicó en la habilidad para establecer comparaciones, identificar relaciones y representarlas visualmente con barras. Dado que cada problema plantea una relación única entre las cantidades, las configuraciones gráficas creadas por los estudiantes reflejan de manera distinta estas conexiones. Además, el uso de variadas representaciones fortaleció la comprensión de conceptos fundamentales como la igualdad y la identificación de la incógnita. Los estudiantes emplearon una variedad de enfoques y métodos para discernir las relaciones cuantitativas en cada tipo de problema. Experimentaron con medidas iteradas, ajustes incrementales o decrementales y la comparación entre múltiples cantidades. Esta estrategia promovió una evolución en el uso de representaciones gráficas y operaciones matemáticas, integrando conceptos previos como la definición de medidas e incorporando nuevos elementos, como la idea de “completar la medida”, ilustrada en la Figura 5.

El segundo descriptor examina los alcances del “método de barras”, una estrategia visual para resolver problemas matemáticos. Aunque las expectativas iniciales hacia este método eran altas, anticipando que simplificaría la comprensión de los problemas, aproximadamente la mitad de los alumnos encontraron dificultades en su aplicación. Las principales barreras fueron la reticencia a dibujar por limitaciones de tiempo y la demanda de precisión en el dibujo, como la escala proporcional de las barras. Algunos estudiantes, seguros en su comprensión de la ecuación, veían como superfluo el paso de representar visualmente las relaciones. Otro grupo luchó con la representación de las relaciones de cantidades indeterminadas mediante barras, mostrando preferencia por interpretaciones numéricas en lugar de las geométricas.

Para la otra mitad de los estudiantes, el método de barras resultó ser una herramienta valiosa. El uso de la “medida” como cantidad de referencia fue fundamental en la construcción de los modelos gráficos y en la formulación de las ecuaciones correspondientes. Las barras no solo facilitaron la identificación de las relaciones cuantitativas en los problemas sino que también se convirtieron en un medio para diferenciar entre las cantidades involucradas. Además, el modelo de barras estableció un contexto claro para comprender la igualdad, un concepto esencial en el ámbito de las ecuaciones. Esto se reflejó en el empeño de los estudiantes por preservar la correspondencia entre el modelo gráfico y el total, como se ilustra en la figura 5.

Conclusiones

La presente investigación resalta la importancia de la interpretación y la aplicación de representaciones matemáticas en la solución de problemas algebraicos. Se observó una diversidad de ejemplos en los que los estudiantes emplearon representaciones gráficas, numéricas y algebraicas para ilustrar relaciones y establecer igualdades. Estas competencias trascienden el simple manejo de distintas formas de representación, engloba la capacidad de moverse con agilidad entre ellas, lo que fue evidente durante el proceso de resolución, donde los estudiantes alternaron entre representaciones para identificar las relaciones planteadas. Este estudio también resalta la relevancia del método de barras como instrumento en la resolución de problemas matemáticos. La representación visual que ofrecen las barras es esencial para guiar la formulación de ecuaciones, proporcionando a los alumnos principiantes una comprensión más tangible de las ecuaciones y las relaciones que encierran. A pesar de los retos que algunos estudiantes pueden enfrentar al principio, como fue documentado en esta investigación, las barras constituyen una herramienta visual inestimable que puede mejorar significativamente la comprensión y el manejo de los conceptos algebraicos.

La estrategia pedagógica que integra la enseñanza con variación y el método de barras se ha mostrado como eficaz para la educación en álgebra. Los problemas presentados en este estudio promovieron que los estudiantes explorarán distintas maneras de establecer relaciones entre cantidades, evidenciando un enriquecimiento progresivo de sus habilidades y herramientas para resolver problemas. Este desarrollo gradual, que consolida conocimientos previos y agrega competencias nuevas a lo largo del aprendizaje, es uno de los méritos del enfoque educativo. La adaptación al método de barras no fue uniforme entre todos los estudiantes. Algunos enfrentaron dificultades relacionadas con el tiempo y la precisión requerida para la representación gráfica. No obstante, una proporción significativa de los alumnos encontró en el método de barras una herramienta valiosa, facilitando la comprensión de las relaciones cuantitativas y la noción de igualdad en las ecuaciones, así como permitiendo la integración de múltiples representaciones de la información.

En síntesis, este estudio subraya la relevancia de las representaciones matemáticas en la solución de problemas algebraicos y resalta la utilidad de estrategias pedagógicas que promueven la variación y las técnicas visuales. Estas estrategias enriquecen la habilidad de los estudiantes para abordar problemas matemáticos y fortalecen su entendimiento de conceptos fundamentales como la medida, la igualdad y la incógnita.

Referencias

Baldor, A. (2019). *Álgebra*. Patria.

Baysal, E., y Sevinc, S. (2022). The role of the Singapore bar model in reducing students' errors on algebra word problems. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 53*(2), 289–310. https://doi.org/10.1080/0020739X.2021.1944683

Gu, E., Huang, R. y Gu, L. (2017). Theory And Development Of Teaching Through Variation in Mathematics in China. En R. Huang y Y. Li (Eds.). *Mathematics Teaching and Learning*, (V 2, pp. 13–41). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-6300-782-5_2

Hiebert, J. y Wearne, D. (1993). Instructional tasks, classroom discourse, and students' learning in second-grade arithmetic. *American Educational Research Journal, 30*(2), 393–425. https://doi.org/10.3102/00028312030002393.

Hoven, J. y Garelick, B. (2007). Singapore math: Simple or Complex? *Educational Leadership, 65*(3), 28–31. https://www.researchgate.net/publication/228376108_Singapore_Math_Simple_or_Complex.

Jiang, C., Hwang, S. y Cai, J. (2014). Chinese and Singaporean sixth-grade students' strategies for solving problems about speed. *Educational Studies in Mathematics*, *87*, 27–50. https://link.springer.com/article/10.1007/s10649-014-9559-x.

Kaput, J. (1989). Linking representations in the symbol system of algebra. En S. Wagner y C. Kieran (Eds.), *Research issues in the learning and teaching of algebra* (pp. 167-194). Routledge.

Kieran, C. (2022). The multi-dimensionality of early algebraic thinking: background, overarching dimensions, and new directions. *ZDM Mathematics Education 54*, 1131–1150. https://link.springer.com/article/10.1007/s11858-022-01435-6.

Marton, F. (2015). *Necessary conditions of learning*. Routledge.

Ng, S.F. y Lee, K.(2009). The Model Method: Singapore Children's Tool for Representing and Solving Algebraic Word Problems. *Journal for Research in Mathematics Education*, *40*(3), 282–313. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.40.3.0282

Pérez Ariza, K. (2020). Una tipología de ejercicios para el tratamiento de la comprensión de problemas aritméticos verbales. *LUZ*, *19*(3), 66–80. https://luz.uho.edu.cu/index.php/luz/article/view/1053.

Schiefter, D., y Jo Russell, S. (2022). The centrality of student-generated representation in investigating generalizations about the operations. *ZDM. Mathematics education,54*, 1289–1288. https://doi.org/10.1007/s11858-022-01379-x.

Sevinc, S. y Lizano, C. (2022). Bar model method as a problem-solving heuristic: an investigation of two preservice teachers' solution paths in problems involving ratio and percentage. *Mathematics Education Research Journal*, *36*, 71-95. https://link.springer.com/article/10.1007/s13394-022-00427-9.

Thirunavukkarasu M. y Senthilnathan, S. (2017). Effectiveness of bar model in teaching algebra at secondary level. *International Journal of Teacher Educational Research*, *6*(10-12), 34–43. https://www.researchgate.net/publication/322202385_Effectiveness_of_Bar_Model_in_Teaching_Algebra_at_Secondary_Level_EFFECTIVENESS_OF_BAR_MODEL_IN_TEACHING_ALGEBRA_AT_SECONDARY_LEVEL.

Tiangtrong, P. (2020). Using Bar Model Method to Solve Algebraic Problems: Word Problems, Linear Equations of One Variable and System of Linear Equations of Two Variables. *Mathematics Journal*, *65*(700), 22–44. https://ph02.tci-thaijo.org/index.php/MJMATh/article/view/207663.

Van Manen, M. (1990). *Researching Lived Experience: Human Science for an Action Sensitive Pedagogy*. State University of New York Press.

Watson, A. y Mason, J. (2009). Seeing an Exercise as a Single Mathematical Object: Using Variation to Structure Sense-Making. *Mathematical Thinking and Learning*, *8*(2), 91–111. https://doi.org/10.1207/s15327833mtl0802_1

Conflicto de intereses

Los autores declaran que no existen conflictos de intereses

Declaración de contribución de autoría

Apolo Castañeda: conceptualización, curación de datos, investigación, metodología, validación, visualización, redacción, revisión

Juan Luis Ramírez Lubianos: conceptualización, curación de datos, investigación, metodología, redacción, revisión