MENDIVE
REVISTA DE EDUCACIÓN

Metodología para el desarrollo del pensamiento lógico-matemático desde la demostración por inducción completa

Methodology for the development of the logical mathematical thought from the demonstration by complete induction

Serdaniel Nieves Pupo[1], Carlos Manuel Caraballo Carmona[1], Carlos Luis Fernández Peña[1]

[1]Universidad de Pinar del Río «Hnos Saíz Montes de Oca». Cuba.
Correo electrónico: serdaniel.nieves@upr.edu.cu

Recibido: 14 de mayo 2019.
Aprobado: 02 de julio 2019.

RESUMEN
Este artículo es el resultado de una investigación sobre procedimientos lógicos asociados a la aplicación del método de demostración por inducción matemática a contenidos relacionados con las sucesiones numéricas; el estudio se realiza a partir de insuficiencias en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la asignatura Matemática en el duodécimo grado, que tienen su base en inconsistencias teóricas y la tendencia a la ejecución mecánica de procedimientos sin argumentos lógicos; para contribuir a resolver esta problemática se emplearon los métodos revisión bibliográfica, la prueba pedagógica y el sistémico-estructural; el principal resultado obtenido es una metodología que comprende cuatro modelos de actividades matemáticas con sus procedimientos de enseñanza; se pudo concluir que una adecuada concepción de las actividades matemáticas, consecuente con la teoría de sucesiones numéricas y la utilización de recursos heurísticos para el razonamiento por inducción, potencian el pensamiento lógico-matemático en la demostración por inducción matemática.

Palabras clave: pensamiento lógico-matemático; inducción matemática; sucesiones numéricas; método de demostración.

ABSTRACT
This article is the result of research on logical procedures associated with the application of the mathematical induction demonstration method to contents related to numerical successions; the study is based on insufficiencies in the teaching-learning process of the subject Mathematics in the twelfth grade, which have their basis in theoretical inconsistencies and the tendency to the mechanical execution of procedures without logical arguments. In order to contribute to solving this problem, the methods used were bibliographic review, pedagogical test and systemic-structural; mathematical. The main result obtained is a methodology that includes four models of mathematical activities with their teaching procedures; it could be concluded that an adequate conception of mathematical activities, consistent with the theory of numerical successions and the use of heuristic resources for inductive

reasoning enhance logical-mathematical thought in the demonstration by mathematical induction.

Key words: Logical-mathematical thought; mathematical induction; numerical successions; method of demonstration.

INTRODUCCIÓN

Uno de los principales objetivos de la enseñanza de la Matemática es desarrollar en los estudiantes un pensamiento lógico, flexible y creativo. El pensamiento racional es objeto de estudio de la Psicología y de la Lógica, este se manifiesta como proceso psíquico cognoscitivo y como resultado.

Según Petrovski (1985) el pensamiento se puede clasificar de acuerdo con el contenido del objeto que lo genera, en ese sentido reconoce el pensamiento: figurativo, práctico, lógico y científico; de los dos últimos hay que señalar que no existe uno sin el otro, sino de qué modo se piensa científicamente sin tener en cuenta las leyes de la Lógica.

Para el autor señalado arriba, el pensamiento se clasifica como lógico porque sigue las leyes de la Lógica, por tanto cuando este pensamiento se desarrolla en el campo de la Matemática, hay que hablar de un pensamiento, por naturaleza lógico, para el campo de matemática, es decir, un pensamiento lógico-matemático.

En Parada (2014) se reafirma la necesidad de que el profesor desarrolle en sus estudiantes un pensamiento lógico-matemático, con el objetivo de que estos encentren formas más útiles de representar los contenidos mediante analogías, ilustraciones, ejemplos, explicaciones y demostraciones.

Además, después de hacer un análisis de varias definiciones dadas por expertos e investigadores, se coincide con Herlina (2015) quien caracteriza el pensamiento lógico-matemático como «el proceso cognitivo que comprende la representación, abstracción, la creatividad y la demostración matemática» (p.2). Luego dichos procesos requieren una atención consciente desde el proceso de enseñanza-aprendizaje. En esencia, se considera que potenciar la habilidad demostrar y en particular la demostración por inducción matemática, constituye una vía indispensable para el desarrollo de este tipo de pensamiento.

Otro enfoque desde el cual se aborda el tema del desarrollo del pensamiento lógico-matemático es el referido a la influencia de las creencias de los estudiantes acerca de la Matemática (Diego, 2019, p.69). Estas determinan el desarrollo de competencias y la forma en que los estudiantes adquieren protagonismo en el desarrollo de sus capacidades intelectuales desde el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática.

Según Valenzuela (2018) «…las estrategias para la generalización de patrones también constituyen una vía para el desarrollo del pensamiento» (p.51). Estas se basan en el estudio de un patrón a través del análisis en secuencia de figuras u objetos matemáticos para determinar una expresión general que permita calcular el valor de cualquier término de la sucesión. Este fenómeno se manifiesta con mucha regularidad en el estudio de las sucesiones numéricas y la demostración de sus propiedades generales a partir de la inducción matemática constituye una forma de generalización.

Dentro de los contenidos del programa de la asignatura Matemática para el duodécimo grado en la enseñanza media superior cubana se encuentra el método de demostración por inducción completa, este se introduce con el objetivo de equipar al estudiante con herramientas que le permitan la demostración de ciertas propiedades matemáticas. Este método se utiliza para demostrar propiedades relacionadas con las sucesiones numéricas, problemas de divisibilidad, problemas geométricos, teoría de juegos, entre otros. La habilidad demostrar propiedades en el dominio de los números naturales utilizando el método de demostración por inducción completa constituye uno de los objetivos principales a evaluar en las evaluaciones sistemáticas, trabajos de control parcial y examen final de dicha asignatura.

En la actualidad es tendencia de los profesores a ponderar el uso del método en el tema de las sucesiones y series numéricas, tal vez porque los procedimientos son más sencillos, relacionando las actividades a la demostración de que a partir de ciertas fórmulas generales se puede calcular la suma de los primeros n términos de una sucesión numérica dada. Estos contenidos tienen un sustento teórico que posteriormente se estudian con profundidad en los cursos de Análisis Matemático en la Educación Superior.

Durante la práctica docente, los espacios de preparación de la asignatura Matemática y en los debates que se producen en los cursos de superación a los profesores, se han podido constatar limitaciones de orden metodológico en cuanto a la enseñanza del método de demostración por inducción completa y los conceptos asociados. Estas se manifiestan en inconsistencias teóricas al abordar temas de sucesiones y series numéricas. Además la enseñanza del método, como contenido de enseñanza, es mecanicista y no sigue la lógica del razonamiento inductivo matemático, trayendo como consecuencia la imposibilidad de aplicarlo a múltiples problemas.

Las insuficiencias cognitivas han sido constatadas como una regularidad año tras año, en las evaluaciones sistemáticas, parciales y finales. Estas se revelan en la aplicación mecánica, sin un fundamento lógico, del método de demostración por inducción matemática. Las carencias en las metodologías empleadas por los docentes, donde existen limitaciones en la enseñanza del método como contenido en sí mismo, no dotan al estudiante de las herramientas necesarias para argumentar sus razonamientos al enfrentar la solución de tareas con distintos niveles de exigencia.

Otro aspecto que influye en dichas insuficiencias es que, la forma en que se presentan los contenidos a los estudiantes en las clases y evaluaciones, contrasta con las actividades que se presentan en el libro de texto de Matemática duodécimo grado de la autoría de Campistrous, (1999).

Por la necesidad de profundizar en causas que subyacen a las insuficiencias mencionadas anteriormente se considera necesario realizar un estudio sobre los conceptos relacionados con el proceso de desarrollo del pensamiento lógico-matemático a partir de la demostración por inducción matemática.

Teniendo en cuenta la necesidad de promover experiencias didácticas que contribuyan al aprovechamiento del trabajo con el método de inducción matemática como recurso para desarrollar el pensamiento lógico-matemático de los estudiantes de preuniversitario, en el presente artículo se pretende dar a conocer una metodología que consta de cuatro modelos de actividades en las cuales se articula, de forma coherente, los contenidos de sucesiones numéricas y los respectivos procedimientos para el proceso de demostración.

MATERIALES Y MÉTODOS

Para la obtención de la metodología que se muestra en este artículo se desarrolló una investigación aplicada, cuya base principal recayó en el uso del método sistémico-estructural, esta se enfocó en cuatro aspectos fundamentales: La formalización con la que se le presenta el contenido a los estudiantes (que deviene en cuatro modelos de actividad); el trabajo con conceptos previos a la demostración; la lógica del proceso de demostración y las formas de aplicación asociadas a la propiedad demostrada.

El diseño de la metodología partió de una revisión bibliográfica sobre el pensamiento lógico-matemático y las bases teórico-metodológicas generales para su desarrollo, se procedió a buscar el sustento teórico que aparece en los libros de matemática superior referido a las sucesiones numéricas y los referentes psicopedagógicos relacionados con el razonamiento por inducción.

Posteriormente se realizaron estudios previos dirigidos a conocer las limitaciones de los estudiantes en el razonamiento seguido durante la demostración por inducción matemática, así como las limitaciones metodológicas de los profesores y los documentos que norman su trabajo, lo que incluyó una prueba pedagógica, una entrevista grupal a profesores y la revisión de los documentos que norman el trabajo del profesor.

La prueba pedagógica se dirigió a diagnosticar tres aspectos fundamentales: los conocimientos de los conceptos de sucesión numérica, término de una sucesión y sucesión de sumas parciales; la lógica del razonamiento hipotético en el paso de la veracidad de casos particulares al planteamiento de hipótesis y tesis, así como el nivel de desarrollo de la habilidad demostrar por el método de inducción matemática en propiedades de las sucesiones aritméticas.

Su aplicación se basó en un muestreo intencional, para ello se seleccionó el Instituto Preuniversitario Vocacional de Ciencias Exactas (IPVCE) «Federico Engels» de la provincia de Pinar del Río. Se escogió dicha institución por ser un centro de estudio en donde los estudiantes tienen una mayor preparación respecto a los demás Preuniversitarios de la provincia. Una vez seleccionada la escuela, se escogieron los mejores estudiantes de los diez grupos de duodécimo incluyendo los estudiantes de concurso, en total 32 estudiantes.

En la aplicación de la prueba pedagógica se procedió de manera que el evaluador participó como moderador a partir del desarrollo de un grupo de indicaciones e interrogantes que le permitieron guiar a los estudiantes en la obtención de las respuestas, a la vez que expresaron los fundamentos de sus razonamientos, lo cual permitió conocer cómo pensaron en el desarrollo de cada una de las acciones de las demostraciones realizadas.

En la metodología seguida por el evaluador para la búsqueda de la información en el intercambio con los estudiantes, se hicieron las siguientes acciones:

1. Verificar si los estudiantes eran capaces de identificar la diferencia entre lo que es un término de la sucesión de sumas parciales y término de la sucesión de sumandos.

2. Verificar si los estudiantes logran identificar la validez de la proposición a demostrar para {n∈N: n≥2}.

3. Verificar la presencia de un pensamiento hipotético mediante la generalización, a partir de la veracidad de casos particulares, de que la proposición es válida para n=k.

4. Verificar si los estudiantes son capaces de realizar funciones de conversión dentro del registro de representación semiótico, en este caso algebraico. Este aspecto incluyó el razonamiento para el desarrollo del paso de la hipótesis a la tesis-demostración.

5. Determinar si los estudiantes son capaces de verificar el proceso de razonamiento desarrollado durante la demostración (verificar la igualdad entre la sucesión de sumas parciales y el término general de una serie numérica).

Para procesar la información primero se hizo una tabulación de los resultados por indicadores, la evaluación de los resultados fue condicional, o sea, se tuvo en cuenta lo que el estudiante desarrolló por sí mismo, contrastado con las respuestas que dio a las preguntas del evaluador. Los resultados se analizaron en cálculos porcentuales.

En el caso de los profesores se realizó un debate grupal con los siguientes aspectos:

El debate se inició con el planteamiento de interrogantes dirigidas a indagar sobre los conocimientos teóricos acerca del método de demostración por inducción matemática (los recursos metodológicos que se utilizan para la enseñanza del método de demostración en torno al paso lógico del inicio a la hipótesis y de esta a la tesis y su demostración) y los conceptos asociados a la teoría de las sucesiones numéricas y series, así como la influencia de estos conceptos en el aspecto interno del método (la forma que el estudiante visualiza la estructura de todo el proceso de demostración y su influencia en el desarrollo del pensamiento lógico-matemático).

Posteriormente se revisaron los documentos metodológicos que sostienen el trabajo del profesor de Matemática en el Preuniversitario referidos a la enseñanza del método de demostración por inducción completa y se contrastaron con las ideas surgidas en el debate con los profesores durante la preparación de la asignatura.

Las insuficiencias cognitivas que manifiestan los estudiantes, las limitaciones metodológicas presentadas por los profesores y la necesidad de una fundamentación teórica en los libros de textos conllevaron a la elaboración de una metodología para el desarrollo del pensamiento lógico-matemático, desde la demostración por inducción matemática.

Para la implementación de la metodología se desarrolló la preparación de los profesores durante el curso de superación, en este participaron 33 profesores de Matemática de toda la provincia de Pinar del Río.

En un primer tema se abordó los conceptos y definiciones fundamentales de la teoría de sucesiones y series numéricas, así como la terminología a utilizar durante el diseño de las actividades. Durante la preparación se debatió sobre conceptos de sucesiones numéricas y cómo deben formularse las preguntas hechas a los estudiantes con la formalización adecuada, de modo que no existieran contradicciones con la teoría referida a las sucesiones y series numéricas.

En el segundo tema se abordó la estructura lógica del teorema: principio de inducción matemática y su demostración, el procedimiento a seguir durante el proceso de demostración según las indicaciones descritas en la metodología y los fundamentos lógicos del inicio, hipótesis, tesis y demostración.

RESULTADOS

Durante el proceso investigativo se obtuvo como resultados que:

El 94 % de los estudiantes tienen limitaciones en el desarrollo de un razonamiento inductivo-hipotético, lo cual se manifiesta en las deficiencias para identificar la diferencia entre los conceptos: término de la sucesión de sumas parciales y término de la sucesión de sumandos. La esencia de dicha dificultad radica en la incapacidad de visualizar las características esenciales de dichos conceptos, dadas por los símbolos de adición entre los términos.

En relación con el resultado anterior también se pudo constatar que el 88% de los estudiantes no logran demostrar la validez de las proposiciones para un valor superior al valor inicial.

EL 91,2 % de los estudiantes actúa de manera mecánica en el planteamiento de la hipótesis, dicho razonamiento mecánico se debe a la contradicción manifestada en la imposibilidad de comprobar la veracidad de las proposiciones para un valor mayor que el inicial, sin embargo no visualizan que al plantear la hipótesis para esta la trae implícita.

El 61,8 % de los estudiantes presentan limitaciones para realizar funciones de tratamiento dentro del registro de representación semiótico, en este caso algebraico. Dichas dificultades se manifiestan en la imposibilidad de los estudiantes para visualizar expresiones equivalentes de un mismo concepto, dadas por la formalización en el lenguaje algebraico.

En cuanto a las limitaciones metodológicas de los profesores, durante los debates en las sesiones de preparación, se pudo constatar que existen insuficiencias en la conceptualización de los contenidos relacionados con la formalización y diferenciación de los conceptos: sucesión numérica y sucesión de sumas parciales. También se constató la tendencia a orientar la ejecución mecánica del inicio de inducción sin tener presente que solo coinciden los conceptos para el caso en que n=1, o para el primer elemento con el cual se comprueba.

También se pudo constatar que los profesores orientan el paso automatizado de hipótesis a tesis mediante la siguiente frase: "Para obtener la tesis solo hay que sustituir en la igualdad, n por k+1", pero es una acción puramente mecánica y memorística, que rompe con todo fundamento lógico del razonamiento.

Se constató que no existen orientaciones metodológicas en el programa de la asignatura Matemática duodécimo grado para el tratamiento a la demostración por inducción completa, en este se remite al libro: Metodología de la enseñanza de la

Matemática, Tomo I (Ballester, 2007, p.328), donde se realiza una breve exposición general del método de demostración como una herramienta que permite demostrar propiedades en el dominio de los números naturales. En dicho libro se describe a grandes rasgos el método general pero no se profundiza en el fundamento lógico necesario para los pasos inicio-hipótesis-tesis y demostración. Además, es necesario analizar la aplicación del método en el contexto de las sucesiones.

Con el objetivo de erradicar las limitaciones metodológicas que tienen los profesores en esta temática y las insuficiencias cognitivas de los estudiantes se propone una metodología con el fin de desarrollar en los estudiantes un pensamiento lógico-matemático desde la demostración por inducción matemática.

Metodología para el desarrollo del pensamiento lógico-matemático desde la demostración por inducción completa

A partir del concepto de metodología propuesto por De Armas & Valle (2011), la metodología es entendida como una secuencia de acciones y orientaciones que indican el paso a paso a seguir por los profesores para desarrollar el pensamiento lógico-matemático a partir del trabajo con el método de demostración por inducción matemática. A continuación se describen las acciones a desarrollar y las orientaciones para cada una.

1. Identificar el tipo de modelo de actividad a desarrollar.

2. Tratamiento de los conceptos fundamentales de sucesiones y series numéricas.

3. Tratamiento de los elementos fundamentales del método de demostración por inducción matemática.

4. Desarrollo de tareas asociadas al método de demostración y evaluación de las transformaciones logradas en el estudiante.

De acuerdo con la metodología planteada se considera que, para que los estudiantes tengan éxito en la utilización del método de demostración por inducción matemática y los conceptos asociados, lo primero que se debe conocer por parte del profesor es cómo formular las afirmaciones y preguntas, de forma que no existan contradicciones con la teoría de las sucesiones.

A continuación se discuten cuatro modelos para las actividades matemáticas y se argumenta el proceder metodológico para cada caso:

1. Sea la suma $8+12+16+...+(4n+4)=S_n$, $n\geq1$

2. Sea $8+12+16+...+(4n+4)$ el término general de la sucesión $\{S_n\}$, $n\geq1$

3. Sea la sucesión aritmética $\{A_n\}=\{8;12;16;\ldots;(4n+4);\ldots\}$; $n\geq1$ y $\{S_n\}$ la sucesión de sumas parciales.

4. Sea la función $a: N\rightarrow R$ tal que $a(n)=4n+4$ para todo $n\geq1$ y $S_n=a(1)+a(2)+a(3)+...+(4n+4)$

En las actividades anteriores la notación de sucesiones ha sido tomada según (Valdés & Sánchez, 2017). En el primero de los casos no se hace referencia al término «sucesión» por lo que posteriormente no es recomendable incluir en los incisos subordinados dicho término, y si se hiciera, se debe aclarar a quién se hace referencia, a la sucesión de sumandos o la sucesión de sumas parciales. En el segundo de los casos se hace referencia a la sucesión de sumas parciales, por lo que si se fuera a preguntar por algún término de la sucesión de sumandos habría que dejarlo explícito.

En el tercer caso se hace explicita la sucesión aritmética y a la sucesión de sumas parciales de dicha sucesión, aunque no se plantea el término n-ésimo de $\{S_n\}$. En este caso se visualiza mejor la diferencia entre los términos de la sucesión de sumandos y los términos de la sucesión de sumas parciales. En el cuarto caso se habla de la sucesión en el lenguaje funcional como caso particular. En esta los conceptos de términos de la sucesión adquieren el nombre de valores funcionales, suma de las imágenes de la función, o suma de valores funcionales.

En cualquiera de los casos, que se escoja enunciar una actividad, es necesario ser consecuente con la teoría de sucesiones ya sea en el lenguaje de «término de» o «valores de la función». Tal elección no debe dar lugar a confusión si la referencia es a la sucesión aritmética o a la sucesión de sumas parciales. Ahora veamos como plantear correctamente las preguntas para cada ejemplo:

A. Se pide calcular un sumando dada la posición k

- En el ejemplo 1: "Diga el sumando de S_n que se encuentra en la posición *k*".

- En el ejemplo 2: "Diga el sumando del término general de la sucesión S_n que se encuentra en la posición *k*".

- En el ejemplo 3: "Diga el k término de la sucesión $\{A_n\}$", o "diga el término de la sucesión $\{A_n\}$ que se encuentra en la posición k".

- En el ejemplo 4: "Calcule a(k)", o "determine el valor de la función para n=k".

Para este tipo de pregunta el estudiante debe evaluar n=k (la posición dada) en la expresión que genera los sumandos, o sea, en el término general de la sucesión aritmética. Se debe prestar especial atención en el dominio de definición de dicha sucesión, si es para $n \geq 0$, para $n \geq 1$ que también puede escribirse como $n>0$, o para $n \geq a$. En cualquier caso hay que tener presente lo siguiente:

- Si la sucesión se define para $n \geq 0$ entonces hay un desfasaje entre la posición del término pedido y el valor natural por el cual se sustituye n. Este sería [(*n-ésima posición*)-1]. (Tabla 1)

Tabla 1- Tabla de secuencia

Posición	1	2	3	…n
Sustitución (n)	0	1	2	…(n-1)

En el aprendizaje de este caso, se recomienda que el estudiante ensaye la búsqueda de los primeros dos o tres términos para que pueda visualizar la diferencia entre la posición y el valor que sustituye.

- Si la sucesión se define para $n \geq 1$, en este caso coincide la posición dada con el valor natural por el cual hay que sustituir para obtener el término pedido.

-Si la sucesión se define para $n \geq a$, entonces hay un desfasaje entre la posición del término y el valor natural por el cual se sustituye n. En este caso habría que sustituir por [(n-ésima posición)+(a-1)]. En la tabla 2 se muestra la secuencia.

Tabla 2- Tabla de secuencia

Posición	1	2	3	…n
Sustitución (n)	a	a+1	a+2	…a+(n-1)

B. Si se quiere determinar la posición dado un elemento de la sucesión aritmética.

- En el ejemplo 1: $a_i$es un sumando de S_n. Determina su posición.

- En el ejemplo 2: $a_i$es un sumando del término general de la sucesión $\{S_n\}$. Determina su posición.

- En el ejemplo 3: a_i es un término de la sucesión $\{A_n\}$. Determina su posición, o ¿Es a_i es un término de la sucesión $\{A_n\}$? Argumenta.

- En el ejemplo 4: Determina, si existe, el valor natural para el cuál a_i es imagen de la función a.

En este tipo de pregunta al estudiante se le propone un término de la sucesión aritmética y se le pide que determine la posición. El procedimiento es que el estudiante iguale el término general de la sucesión al término del cual se quiere determinar la posición. Para esta situación el estudiante debe razonar del siguiente modo "Si a_i es un término de la sucesión $\{A_n\}$ entonces existe un número natural n para el cual $A_n=a_i$", la cuestión sería entonces buscar dicho n, el cuál se obtiene de resolver la ecuación $A_n=a_i$. En este caso hay que tener presente el dominio de definición de la sucesión $\{A_n\}$, o sea, si es para $n\geq0$, para $n\geq1$ o para $n\geq a$. Veamos los tres casos:

- Si la sucesión $\{A_n\}$ se define para $n\geq0$. Entonces para determinar la posición del término a_i hay que sumar 1 a la solución de la ecuación, o sea, si la solución de la ecuación es n el término dado se encuentra en la posición $i=n+1$.

Para que el estudiante comprenda este tipo de razonamiento, es importante que primero realice la determinación de la posición de los primeros dos o tres términos y compare la solución de la ecuación con la posición de los términos.

- Si la sucesión $\{A_n\}$ se define para $n\geq1$, entonces la posición pedida del término dado a_i coincide con la solución de la ecuación $A_n=a_i$, en este caso $i=n$.

- Si la sucesión $\{A_n\}$ se define para $n\geq a$, entonces para determinar la posición de a_i hay que restar el desfasaje a la solución de la ecuación $A_n=a_i$, o sea, si n es la solución entonces $i=n-(a-1)$, en la siguiente tabla se ilustra el procedimiento para la sucesión $\{6n\}$ cuando $n\geq3$.

Tabla 3- Tabla de secuencia

Término a_i	18	24	30	…6a
Solución de A_n=a_i	n=3	n=4	n=5	…n=a
Posición p_i	$p_1=1$	$p_2=2$	$p_3=3$	…$p_i=i=n-(a-1)$

C. Demostrar por el método de inducción matemática que la suma planteada se puede calcular por cierta fórmula S_n.

- En el ejemplo 1: Demuestra aplicando el principio de inducción matemática que $S_n=2n(n+3)$ para $n\geq1$.

- En el ejemplo 2: Demuestra aplicando el principio de inducción matemática que el término general de $\{S_n\}$ es $S_n=2n(n+3)$ para $n\geq1$.

- En el ejemplo 3: "Demuestra aplicando el principio de inducción matemática que la suma de los primeros n términos de la sucesión aritmética $\{A_n\}$ es $S_n=2n(n+3)$ para $n\geq1$", o "demuestra aplicando el principio de inducción matemática que la sucesión de sumas parciales $\{S_n\}$ tiene por término general $S_n=2n(n+3)$".

- En el ejemplo 4: Demuestra aplicando el principio de inducción matemática que la suma de los primeros n valores funcionales se calcula por la expresión $S_n=2n(n+3)$.

Analicemos ahora el proceder para desarrollar el método de demostración por inducción matemática. Una variante muy fácil para que el estudiante visualice las relaciones de la propiedad que se desea demostrar, es escribirla como una igualdad entre la expresión que contiene la suma de los términos de la sucesión aritmética y la expresión que genera las sumas parciales. Por ejemplo:

I) $8+12+16+...+(4n+4)=2n(n+3)$ para $n\geq1$ o también pudiera escribirse:

II) $\sum^{n}_{(i=1)}(4i+4) =2n(n+3)$

Comencemos la demostración con el inicio de inducción para n=1. En este caso es necesario observar que lo importante es comprobar que la expresión del miembro derecho de la igualdad produce la suma de los primeros n términos de la sucesión aritmética $\{4n+4\}$ y que solamente coinciden en el primer término. Luego debería ser:

MI (miembro izquierdo): $S_1=8$ y MD (miembro derecho): $2\cdot1(1+3)=8$. Luego la propiedad es válida para n=1.

Aunque no es imprescindible, si es importante que el estudiante sepa comprobar que la propiedad es válida para otros valores n=2;3…. Esto propicia que el estudiante conozca el significado de la expresión que está demostrando. Es conveniente no solo conformarse con la veracidad de la proposición para un valor inicial, sino que se realice una breve exploración sobre la veracidad de la proposición para otros valores mayores que. Esto quizás pudiera advertirnos de un mal razonamiento antes de continuar. Además, la veracidad de algunos casos sugiere el planteamiento de una hipótesis.

Por ejemplo, comprobemos que la igualdad también es válida para n=2 y n=3 y respectivamente.

MI: $S_2=8+12=20$ MD: $2\cdot2(2+3)=4\cdot5=20$. Luego se cumple.
MI: $S_3=8+12+16=36$ MD: $2\cdot3(3+3)=6\cdot6=36$. Luego se cumple.

De esta forma se prepara lógicamente al estudiante para que sienta la necesidad de formular una hipótesis o sea una conjetura, aún no demostrada. De la veracidad de casos particulares se induce la veracidad de la proposición para un n=k, se supone que la suma de los primeros k términos de $\{4n+4\}$ o sumandos del miembro izquierdo de la igualdad es verdadera.

Hipótesis de inducción: La proposición es verdadera para n=k. En este caso el estudiante debe comprender que esto significa que la suma de los primeros k sumandos se puede calcular por la expresión propuesta para S_n. Por ejemplo:

a) $8+12+16+...+(4k+4)=2k(k+3)$

b) $S_k=8+12+16+...+(4k+4)$

c) $S_k=2k(k+3)$

d) $\sum^{k}_{(i=1)}(4i+4)=2k(k+3)$

Todas estas expresiones tienen el mismo significado. La más utilizada en la enseñanza media cubana es la del inciso a), esta se obtiene de una combinación inmediata de los incisos b) y c). Ahora el razonamiento sería el siguiente "si para n=k la proposición es verdadera, entonces para n=k+1 también es verdadera".

Tesis de inducción: La proposición también es verdadera para n=k+1. Es necesario hacer énfasis en el significado de este paso y relacionarlo de manera lógica con el anterior.

Uno de los errores lógicos que comete el estudiante es sustituir de forma mecánica la posición k por k+1 en el inciso a) anterior, quedando de la siguiente manera:
$8+12+16+...+(4k+8)=2(k+1)(k+4)$. No es está mal hacerlo, la dificultad está en hacerlo y no tener conciencia de que ahora el último sumando que se muestra en el miembro izquierdo tiene posición k+1. En este sentido es importante reconocer que el sumando anterior es precisamente (4k+4). Pero lo que sucede muchas veces es que no se conoce, o el profesor quiere evitar el esfuerzo de la explicación y lo que orienta es un procedimiento automático de sustitución. Entonces ¿cómo hacerlo?

Si ya en la hipótesis se ha planteado la suma hasta el k sumando, simplemente hay que agregar a dicha suma el siguiente sumando, «manteniendo el sumando anterior». Quedando de una de las siguientes formas:

a)
$8+12+16+...+(4k+4)+(4k+8)=2(k+1)(k+4)$

b) $S_{(k+1)}=8+12+16+...+(4k+4)+(4k+8)$

c) $S_k+(4k+8)=2(k+1)(k+4)$

d) $S_{(k+1)}=S_k+(4k+8)$

e) $S_{(k+1)}=2(k+1)(k+4)$

f) $\sum^{k}_{(i=1)}(4i+4)+(4k+8)=2(k+1)(k+4)$

g) $\sum^{k}_{(i=1)}(4i+4)=2(k+1)(k+4)$

Aunque todas son válidas y equivalentes se considera que de estas formas de escribir la tesis el inciso a) es más sugerente para visualizar una lógica de demostración directa, o sea, a partir de la hipótesis obtener la tesis. En efecto, como se ha supuesto la hipótesis verdadera entonces comencemos por esta:

$8+12+16+...+(4k+4)=2k(k+3)$. Lo que se desea es obtener la tesis, debemos guiar al estudiante a un proceso visual y lógico de comparación entre los miembros izquierdos de la hipótesis y la tesis.

Hipótesis:
$8+12+16+...+(4k+4)=2k(k+3)$
Tesis:
$8+12+16+...+(4k+4)+(\mathbf{4k}+\mathbf{8})=2(k+1)(k+4)$

De esta forma el estudiante podrá tener apoyo visual para su razonamiento, solo tendría que preguntarse ¿qué le falta al miembro izquierdo de la hipótesis para obtener el miembro izquierdo de la tesis?, se puede observar fácilmente que es el sumando (4k+8), luego basta agregar este a ambos miembros de la hipótesis y comprobar, a partir de operaciones, que se puede obtener el miembro derecho de la tesis. Se debe resaltar que al final de la demostración se ha obtenido la igualdad de los dos miembros de la tesis, que es lo que se quería demostrar.

D. Preguntas asociadas a la sucesión de sumas parciales.

- En el ejemplo 1: "Calcula S_{100}" o "Calcula 8+12+16+...+404"

- En el ejemplo 2: "Calcula el término 100 de $\{S_n\}$", "Calcula 8+12+16+...+404", o "Calcula S_{100}"

- En el ejemplo 3: "Calcula la suma de los primeros 100 términos de $\{A_n\}$", "Calcula el término 100 de $\{S_n\}$", "Calcula 8+12+16+...+404", o "Calcula S_{100}"

- En el ejemplo 4: "Calcula la suma de los primeros 100 valores de la función", "Calcula S_{100}" o "Calcula a(1)+a(2)+a(3)+...+a(100).

En todos los casos anteriores se debe resaltar la equivalencia de las preguntas en dependencia del modelo de actividad dada en los cuatro ejemplos. También se pueden incorporar algunas preguntas sencillas de demostración utilizando el término término general de la sucesión $\{S_n\}$, por ejemplo:

a) Demuestre que la suma hasta un múltiplo de 3 siempre es divisible por 18.

b) Demuestra que la suma de una cantidad par de sumandos siempre es divisible por 4.

En efecto, para el inciso a) cualquier suma hasta un múltiplo de tres se obtiene para n=3k de donde se obtiene que $S_{3k}=2\cdot 3k(3k+3)=18k(k+1)$ la cual es divisible por 18. En el inciso b) $S_{2k}=2\cdot 2k(2k+3)=4k(k+1)$ la cual es divisible por 4.

Para construir actividades de las analizadas en esta investigación basta escoger una fórmula general cualquiera del tipo {an+b}, (n≥1) la cual representa una sucesión aritmética, luego obtenemos los primero tres términos y los sumamos hasta obtener una expresión del tipo a_1+a_2+a_3+...(an+b). Después utilizamos la expresión $S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d$ (n≥1) para obtener la expresión particular del término general de la sucesión {S_n } quedando de la siguiente manera:

$a_1+a_2+a_3+...(an+b)=S_n$ (n≥1)

Si se quiere definir para basta adicionar a ambos miembros de la igualdad anterior, o sea:

$〚b+a〛_1+a_2+a_3+...(an+b)=S_n+b$,(n≥0)

También pudiera extenderse al dominio de los números enteros negativos si multiplicamos por -1 ambos miembros de cualquiera de las dos igualdades anteriores:

$-a_1-a_2-a_3-…-(an+b)=-S_n$ (n≥1).

Una de las manifestaciones de la efectividad de la metodología se aprecia en los resultados alcanzado por los estudiantes de duodécimo grado de la provincia de Pinar del Río en la pregunta (P2) referida a la demostración por inducción matemática del examen final (EF). Como se aprecia en la tabla 4, el 94,8% de los estudiantes aprobados alcanzaron más de 12 puntos de los 20 posibles y el 86,2% de los aprobados alcanzaron el máximo de puntos en la pregunta.

Tabla 4 - Resumen de los resultados del examen final de Matemática duodécimo grado.

12mo	(EF)	P2 (EF)	P2 (20 puntos)
Matrícula	2688	2686	2686
Aprobados	2686	2546	2314
Porciento	99,9%	94,8%	86,2%

Fuente: Informe de resultados del examen final de la Dirección Provincial de Educación, Pinar del Río. Curso 2018-2019.

DISCUSIÓN

Los resultados anteriores muestran que durante el proceso de conceptualización, es necesaria una coherencia entre el significado, la formalización y la forma en que le son presentado a los estudiantes los contenidos referidos a las sucesiones y series numéricas, lo cual es fundamentado por Distéfano (2019) quien considera que «el significado está determinado por la identificación, la sintaxis y la semántica» (p.149). Dichos elementos son esenciales para el desarrollo del pensamiento lógico-matemático, en tanto la formalización depende de una correcta definición y las diferencias esenciales que emergen según el nivel de abstracción al visualizar una sucesión de sumas parciales como caso particular de sucesión.

Dichos aspectos son abordados en la metodología planteada a partir de que se le sugiere al profesor, que contextualice el método de demostración por inducción matemática para el caso de las sucesiones numéricas. En este sentido el estudiante debe organizar su pensamiento lógico-matemático a partir del modelo de actividad matemática a la que se enfrenta. Estos modelos dependen de la forma en que se enuncia la actividad y de la formalización en que se presentan los conceptos de sucesiones y series; sea como suma, como término general de una suma o en el lenguaje funcional debido a que una sucesión es una función de N→R.

Se coincide con D´Amore (2015) en tanto que para lograr un desarrollo del pensamiento lógico matemático de los estudiantes «es necesario relacionar estrechamente los procesos semio-cognitivos (funciones de tratamiento y conversión)» (p.183). Dichos aspectos están relacionados con la habilidad: demostrar por inducción matemática, aspecto que constituye una dificultad debido a que los estudiantes no logran armonizar los conceptos de sucesiones y series por la formalización en que se les presentan los contenidos.

Los resultados evidencian que existen limitaciones en la identificación de términos de la sucesión de sumandos y de la sucesión de sumas parciales, confundiendo estos conceptos. Dicha incoherencia se debe a forma en que se formula la pregunta, debido a que no se es consecuente la teoría de sucesiones y su lenguaje formal. Esta situación influye en que el estudiante establezca una hipótesis sin haber fundamentado sus ideas en un razonamiento inductivo, es decir, dicho proceder metodológico conlleva a que el estudiante formule una hipótesis mecánica y sin fundamento lógico.

Es necesario que antes de la utilización del método de demostración, a los estudiantes se les planteen actividades relacionadas con la manipulación de conceptos previos que sustentarán todo el razonamiento de la demostración que se realizará posteriormente. Dicha manipulación previa tiene gran relación con las formas en que se evitan los obstáculos cognitivos, que según D´Amore (2015) están relacionados con las características específicas del único instrumento posible de su denotación: los sistemas semióticos (formalización matemática) y afirma que en la actualidad éste es uno de los temas de mayor difusión en el mundo, en el ámbito investigativo.

Otro de los hallazgos importantes es la alta probabilidad de errores que comete un estudiante al intentar ejecutar de forma mecánica los procedimientos de demostración por inducción. Para resolver esta problemática el profesor debe desarrollar en el estudiante un pensamiento inductivo, es decir, educar al estudiante a la verificación de cierta propiedad para casos particulares, de estos infiere una hipótesis y tesis que luego se demuestra.

Como elemento novedoso para el manejo del método se sugiere que en el inicio de inducción se destaque que para n=a (valor inicial) los conceptos asociados a sucesión de sumandos y sucesión de sumas parciales coinciden, por lo tanto es de suma importancia que se hagan más comprobaciones de veracidad para notar la diferencia entre dichos conceptos. Además este proceder potencia el razonamiento por inducción (de la veracidad de casos particulares se induce una regla general). Dicho aspecto fortalece la racionalización de la actividad práctica de los estudiantes durante el razonamiento inductivo.

Según lo anterior, es necesario que los estudiantes planteen la tesis teniendo presente la suma hasta el término n=k (para visualizar que en la hipótesis se consideró una proposición como válida hasta n=k) y posteriormente adicione el sumando que está en la posición n=k+1. De lo contrario está realizando un procedimiento mecánico de sustituir n por k+1 sin tener presente el significado, en este caso el estudiante realiza un procedimiento que está bien, pero carece de significado lógico en su razonamiento.

Otro aspecto importante es que la lógica del razonamiento que conduce a plantear la hipótesis yace en la posibilidad de hacer k comprobaciones de veracidad, lo que conlleva a suponer que la proposición es válida para n=k y de ser válida para n=k entonces será válida para n=k+1 que sería la tesis a demostrar. Esto es esencial para que se produzca un desarrollo cualitativamente superior del pensamiento lógico-matemático, en tanto es significativa la lógica del razonamiento seguido.

Los resultados que se obtuvieron con la implementación de la metodología propuesta muestran avances significativamente superiores a cursos anteriores. Los estudiantes evidenciaron, en sus respuestas, una coherencia en la base conceptual de las sucesiones y series numéricas así como un lógico desarrollo procedimental en la demostración por el método de inducción matemática. Las deficiencias detectadas fueron mínimas y se localizaron en conocimientos referidos al trabajo algebraico.

Es una realidad que existen limitaciones teóricas y prácticas en la utilización del método de demostración por inducción matemática, estas se manifiestan en los bajos niveles de aprendizaje de los estudiantes en este tema. En primer lugar, dichas limitaciones tienen su origen en los fundamentos que subyacen a los contenidos en los cuales se implementa el método, dígase los conceptos de: sucesión, término de una sucesión y lugar que ocupa, suma parcial y sucesión de sumas parciales, conceptos que se estudian con profundidad en el Análisis Matemático.

La habilidad demostrar y en particular demostrar por el método de inducción matemática es uno de los mecanismos por el cual se desarrolla el pensamiento lógico-matemático ya que la demostración es un proceso característico del mismo. Es en el duodécimo grado de le escuela cubana donde se inicializa al estudiante en este tipo de actividad, precisamente para equiparlo de una importante herramienta matemática y a la vez contribuir al desarrollo de su pensamiento lógico.

La forma en que los profesores presentan dichos contenidos es esencial para lograr en los estudiantes un desarrollo intelectual eficaz y productivo. Por tanto es importante saber cómo razona el estudiante durante la utilización del método para diseñar acciones metodológicas efectivas, estas deben estar sustentadas en el principio de inducción matemática, en la correcta formalización de la teoría de sucesiones y series numéricas, así como, en argumentos lógicos que permitan un razonamiento deductivo-hipotético durante el proceso de demostración.

El desarrollo del pensamiento lógico-matemático se manifiesta en la visualización estructurada y generalizada de los procedimientos que intervienen en una determinada actividad; en el nivel de abstracción de los estudiantes para la identificación de conceptos subordinados y colaterales, en la capacidad para fundamentar el razonamiento inductivo-hipotético y en la posibilidad utilizar el método de demostración en diferentes contextos y problemas.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Ballester, S. (2007). Metodología de la enseñanza de la Matemática. La Habana, Cuba: Pueblo y Educación.

Campistrous, L. (1999). Libro de texto de Matemática duodécimo grado, parte 1. La Habana, Cuba: Pueblo y Educación.

D´ Amore, B. (2015). Análisis de los antecedentes histórico-filosóficos de la «paradoja cognitiva de Duval». Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 18(2), pp. 177-212. Recuperado de: http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=33540064003.

De Armas, N. & Valle, L. (2011). Resultados científicos en la investigación educativa. La Habana, Cuba: Editorial Pueblo y Educción.

Diego, J.M. (2019). Adaptación y Validación del MRBQ (Mathematics-Related Beliefs Questionnaire) al contexto colombiano con estudiantes de secundaria. *Educación Matemática, 31*(1). Recuperado de: http://www.revista-educacion-matematica.org.mx/descargas/vol31.

Distéfano, M.L. (2019) Caracterización de procesos de significación de símbolos matemáticos en estudiantes universitarios. Revista: Educación Matemática, 31(1), Recuperado de: http://www.revista-educacion-matematica.org.mx/descargas/vol31.

Herlina, E. (2015). Advanced Mathematical Thinking and the Way to Enhance IT, Journal of Education and Practice, 6(5)

Petrovski, A. (1985). Psicología General. La Habana, Cuba: Editorial Progreso.

Parada, S. (2014). Reflexiones de profesores de Matemática sobre aspectos relacionados con su pensamiento didáctico. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 17(1), pp. 83-113. Recuperado de: http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=33530083005

Valdés, C. & Sánchez, C. (2017). Análisis de funciones de una variable real. La Habana, Cuba: Editorial Universitaria Félix Varela, p. 8-11, 61-71.

Valenzuela, J. (2018). Desarrollo del pensamiento algebraico en estudiantes de bachillerato a través de la generalización visual de sucesiones de figuras. Revista: Educación Matemática, 30(2) Recuperado de: http://www.revista-educacion-matematica.org.mx/descargas/vol30