

**Factor de fricción de la pulpa laterítica  
considerada como fluido Herschel-Bulkley en  
régimen de flujo laminar**

**Friction factor of the lateritic pulp considered  
Herschel-Bulkley fluid in laminar flow regime**

Michel Rodríguez-Ismar<sup>1\*</sup>

Isnel Rodríguez-González<sup>1</sup>

Raúl Izquierdo-Pupo<sup>1</sup>

Hugo Javier Angulo-Palma<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Instituto Superior Minero Metalúrgico de Moa, Holguín, Cuba.

<sup>2</sup>Centro de Investigaciones del Níquel, Moa, Holguín, Cuba.

\*Autor para la correspondencia: [mrismar@ismm.edu.cu](mailto:mrismar@ismm.edu.cu)

**RESUMEN**

Se estudió el comportamiento de pulpas lateríticas con 41 % y 42,5 % de sólidos en peso, a temperatura de 27 °C y en régimen laminar, a fin de evaluar la influencia que ejerce la concentración de sólidos y la velocidad de fluido sobre la caída de presión cuando se transporta este tipo de pulpa en un tramo recto de tubería horizontal. Los resultados confirmaron que la pulpa analizada se comporta como plástico real, ajustándose al modelo Herschel-Bulkley. Se evidenció un aumento en

la caída de presión debido a un incremento en la tubería de la velocidad del fluido, lo cual indica que esta última ejerce una mayor influencia en la caída de presión que la densidad y el factor de fricción. Además, se comprueba que en la medida que aumenta la concentración de sólido también lo hace el factor de fricción.

**Palabras clave:** factor de fracción; pulpa laterítica; modelo Herschel-Bulkley; caída de presión; régimen laminar.

## **ABSTRACT**

In order to evaluate the influence exerted by concentration of solids and the fluid velocity on the pressure drop when this type of pulp is transported in a straight section of horizontal pipe the performance of lateritic pulps was studied with 41% and 42.5% solids/weight, at a temperature of 27 °C and in laminar regime. The results confirm that the analyzed pulp performs like real plastic, meeting Herschel-Bulkley's model; the pressure drop increased due to an increase of the fluid velocity in pipeline, which shows that the latter holds a greater influence on the pressure drop than the friction factor and the density. It was also determined that the friction factor increases while the solids concentration increases.

**Keywords:** fraction factor; lateritic pulp; Herschel-Bulkley model; pressure drop; laminar regime.

Recibido: 28/02/2018

Aceptado: 27/11/2018

## INTRODUCCIÓN

La reología de las pulpas lateríticas ha sido objeto de análisis en disímiles investigaciones que caracterizan el fluido no newtoniano. Unas la consideran como plástico Bingham ([Izquierdo y Nikolaev 1995](#); [Izquierdo y Pérez 1995](#); [Izquierdo, Turro y Nikolaev 2001](#)) mientras otras lo hacen como Herschel-Bulkley ([Pérez y Garcell 2011](#); [Pérez et al. 2010](#); [Hernández et al. 2015](#); [Hernández 2017](#)). Izquierdo y colaboradores fundamentan la metodología de cálculo del gradiente de presión con base en los resultados de [Skelland \(1970\)](#); [Bird, Stewart y Lidtfoot \(1992\)](#); y [Steffe \(1996\)](#)

Utilizando pulpas lateríticas a concentración de 44 % de sólidos en peso y a temperatura de 27 °C se logró determinar los gradientes de presión en régimen laminar a través de una tubería horizontal y validar una metodología de cálculo de los gradientes para este tipo de fluido, con un error máximo relativo puntual de 8,8 % ([Rodríguez et al. 2016](#)).

La reología de una pulpa depende del estado físico y químico del fluido, así como el flujo que se condiciona, por lo que se requiere aún de más indagaciones en este ámbito, específicamente para la pulpa laterítica con otras concentraciones de sólidos en peso, así mismo para el cálculo del gradiente de presión en tuberías horizontales en régimen de flujo laminar.

Cuando se requiere predecir el gradiente de presión, para el flujo de pulpas en tuberías, la reología del fluido juega un importante rol, fundamentalmente con concentraciones elevadas de los sólidos en la pulpa. La relación del factor de fricción, en función del Reynolds, se aplica al diseño de sistemas de tuberías, pero esto depende de los parámetros reológicos del fluido y de la definición del número de Reynolds, en función del tipo de fluido no newtoniano que se use ([Chhabra y Richardson 2008](#)).

La investigación que aquí se presenta busca evaluar para la pulpa laterítica de la empresa niquelera de tecnología ácida el comportamiento del gradiente de presión en tuberías horizontales y en régimen laminar para otras concentraciones de sólido en peso (41 % y 42,5 %) así como determinar la relación del factor de fricción en función del Reynolds.

## **MATERIALES Y MÉTODOS**

### **Materiales**

Se empleó pulpa laterítica con concentraciones de sólidos en peso de 41 %, 42,5 % y 44 % a 27 °C. Los ensayos reológicos y de gradientes de presión se realizaron para las dos primeras concentraciones, mientras los ensayos de densidad incluyeron además la concentración de 44 %.

### **Análisis reológico de la pulpa laterítica**

El equipo utilizado en las pruebas fue un viscosímetro rotacional de cilindros concéntricos RHEOTEST 2. Con vista a determinar la concentración de sólidos en la pulpa se utilizó un analizador de humedad RAD WAG, con una capacidad de la muestra de hasta 50 g de peso.

Se tomaron como valores de gradiente de velocidad  $\gamma$  los establecidos por el rango de medición del equipo, los cuales se encuentran alrededor de 1,17 s<sup>-1</sup> a 279,4 s<sup>-1</sup>.

## **Determinación de la densidad de la pulpa, del líquido dispersante y de los sólidos**

Para la determinación de la densidad del agua de reboso y el sólido se efectuaron tres repeticiones de los experimentos. En el caso de la densidad del sólido, se utilizó el sólido seco obtenido después de someter una muestra de la pulpa laterítica a un proceso de secado por centrifugado. El método utilizado fue el del picnómetro, el cual es de gran utilidad para el cálculo de la densidad de productos pulverulentos, como el mineral laterítico.

Esta prueba se realizó con un juego de picnómetros de 25 ml, una balanza digital con precisión  $\pm 0,0001$  g y una estufa con control de temperatura hasta 100 °C. Para determinar la densidad de la pulpa se utilizó la siguiente ecuación, conociendo la densidad del líquido dispersante y la de los sólidos ([Shanshi 2004](#)):

$$\rho_m = \frac{100}{(W_p / \rho_s) + [(100 - W_p) / \rho_l]} \quad (1)$$

Donde:

$\rho_m$  - Densidad de la pulpa (mezcla) (kg/m<sup>3</sup>)

$\rho_l$  - Densidad del líquido dispersante (kg/m<sup>3</sup>)

$W_p$  - Concentración de sólidos en peso (%)

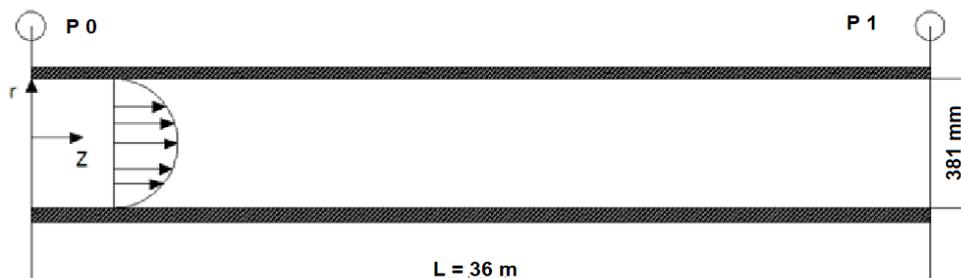
$\rho_s$  - Densidad de los sólidos (kg/m<sup>3</sup>)

## **Determinación de la caída de presión en una sección de tubería**

Para la instalación de las tomas de presión se ubicaron los manómetros a 60 y 40 veces el diámetro nominal de la tubería a la entrada y a la salida ([Fig. 1](#)) de cualquier accesorio, dimensiones recomendadas para

disminuir los errores en la medición. Se obtuvo como resultado de las mediciones entre manómetros una longitud de 36 m de tubería recta horizontal. Las especificaciones técnicas de la tubería son las siguientes, según la norma ANSI ([Reza 2000](#)):

- Diámetro nominal (DN): 400 mm
- Diámetro interior: 381 mm
- Schedule (Sch): 40
- Espesor de pared: 12,7 mm
- Material: acero al carbono



**Fig. 1** - Flujo de un líquido a través de un tubo circular.

La metodología de cálculo para determinar las pérdidas de presión en el hidrot transporte de fluidos Herschel-Bulkley en régimen laminar está definida por [Rodríguez y demás investigadores \(2016\)](#). El gradiente de presión se determinó para diferentes velocidades medias de la pulpa laterítica en régimen de flujo laminar.

### **Diseño de experimento**

La determinación de la influencia que ejerce la concentración en peso de sólidos contenido en la pulpa laterítica y la velocidad de rotación del

motor de la bomba sobre la caída de presión experimental, se realizó teniendo en cuenta un diseño factorial completo o factorial multinivel. Los factores experimentales a considerar fueron: la concentración en peso de sólidos  $W_p$  y la velocidad de rotación del motor de la bomba ( $n$ ), el cual se regula con ayuda del variador de velocidad.

La variable de respuesta es la caída de presión. La concentración en peso de sólidos se estudió a tres niveles relativos: 41 %; 42,5 % y 44 %, en el caso de la velocidad de rotación de la bomba. Igualmente se establecieron tres niveles: 1 170 r/min; 1 440 r/min y 1 710 r/min, lo que equivale a 60 %; 80 % y 95 % de regulación en el variador de velocidad. Es importante señalar que durante los experimentos la válvula de descarga de la bomba se encontraba totalmente abierta.

La expresión matemática que describe el experimento factorial multinivel quedaría como se muestra en la ecuación 2 ([Delgado 2004](#)):

$$N_e = n^k \quad (2)$$

Donde:

$N_e$  -Número de experimentos;

$k$  - Número de factores experimentales

$n$ - Número de niveles

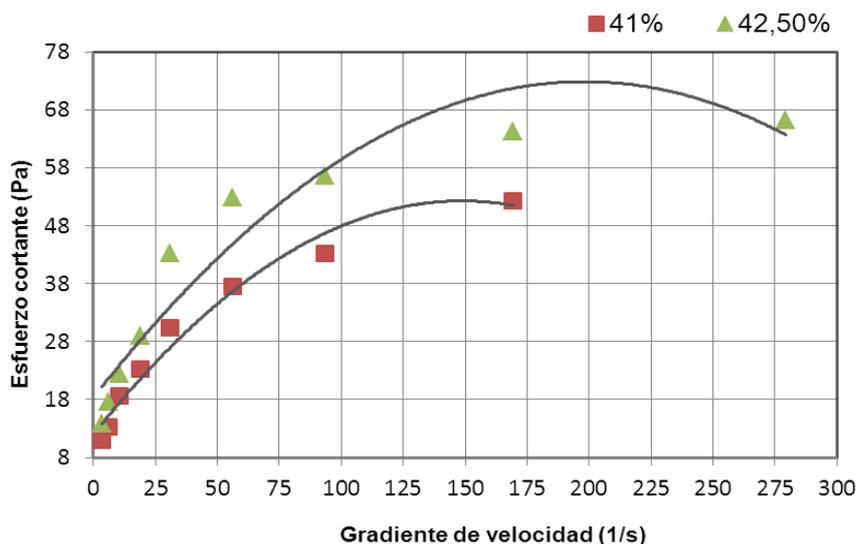
En este caso, se analizó la influencia de dos factores, de aquí que  $k = 2$  luego, aplicándose tres niveles, el número de experimento es nueve.

En total se realizaron 27 corridas, nueve experimentos con dos réplicas para cada medición, de manera no aleatoria. Se utilizó el software Statgraphics Centurion XV.

# RESULTADOS Y DISCUSIÓN

## Comportamiento reológico de la pulpa laterítica

Por la forma de las curvas representadas en la figura 2 se observa que el modelo reológico al que corresponde este comportamiento es el de Herschel-Bulkley. Los valores se ajustan a un polinomio de orden dos, utilizando un análisis de mínimos cuadrados. El coeficiente de determinación ( $R^2$ ) de las curvas fue de 0,97 (41 %) y 0,91 (42,5 %).



**Fig. 2** - Curva de flujo de la pulpa laterítica.

El modelo reológico obtenido (tabla 1) se ajusta al comportamiento de un fluido con características de un fluido plástico real (Herschel-Bulkley), lo cual corrobora resultados anteriores ([Pérez et al. 2010](#); [Pérez y Garcell 2011](#); [Hernández et al. 2015](#); [Hernández 2017](#); [Rodríguez et al. 2016](#)).

**Tabla 1.** Modelo reológico de la pulpa laterítica a 27 °C

Variable	Concentración de sólidos en peso (%)	
	41	42,5
Modelo reológico	$\tau_{rz} = \tau_0 + K \left( -\frac{dvz}{dr} \right)^n$	$\tau_{rz} = \tau_0 + K \left( -\frac{dvz}{dr} \right)^n$
Modelo obtenido	$\tau_{rz} = 11,937 + 0,542 \left( -\frac{dvz}{dr} \right)^{0,5476}$	$\tau_{rz} = 18,302 + 0,551 \left( -\frac{dvz}{dr} \right)^{0,5491}$
Esfuerzo cortante inicial $\tau_0$ (Pa)	11,937	18,302
Índice de consistencia $k$	0,542	0,551
Índice de flujo $n$	0,547	0,549

## Densidad de la pulpa, el líquido dispersante y el sólido

Se observa (tabla 2) que el valor promedio de la densidad del agua de reboso supera al del agua destilada (1 000 kg/m<sup>3</sup>), este exceso es debido a las partículas en suspensión originadas del proceso. La densidad de la pulpa aumentó de modo proporcional al aumento de la concentración de sólido en peso, lo que es coherente con lo reportado en la literatura ([Aziz y Mohamed 2013](#); [Leyva, Guillen y Laurencio 2016](#); [Leyva et al. 2016](#)).

**Tabla 2** - Resultados de los experimentos de densidad a 27 °C

Densidad (kg/m <sup>3</sup> )	Porcentaje de sólidos en peso (%)	Prueba 1	Prueba 2	Prueba 3	Promedio
Densidad del líquido	-	1 038,7	964,9	1 004,8	1 002,8
Densidad del sólido	-	3 182,8	3809,9	3 298,2	3 430,3
Densidad calculada	41		1 412,6		
	42,5		1 434,1		
	44		1 456,2		

## Resultados de los cálculos del gradiente de presión

En las tablas 3 y 4 se muestran los valores de los datos experimentales y los valores calculados obtenidos a partir de la relación pendiente hidráulica y velocidad promedio ( $\Delta P/L=f\langle v \rangle$ ), para diferentes flujos volumétricos de la pulpa laterita, en un tramo recto de tubería horizontal con las concentraciones de sólidos experimentados.

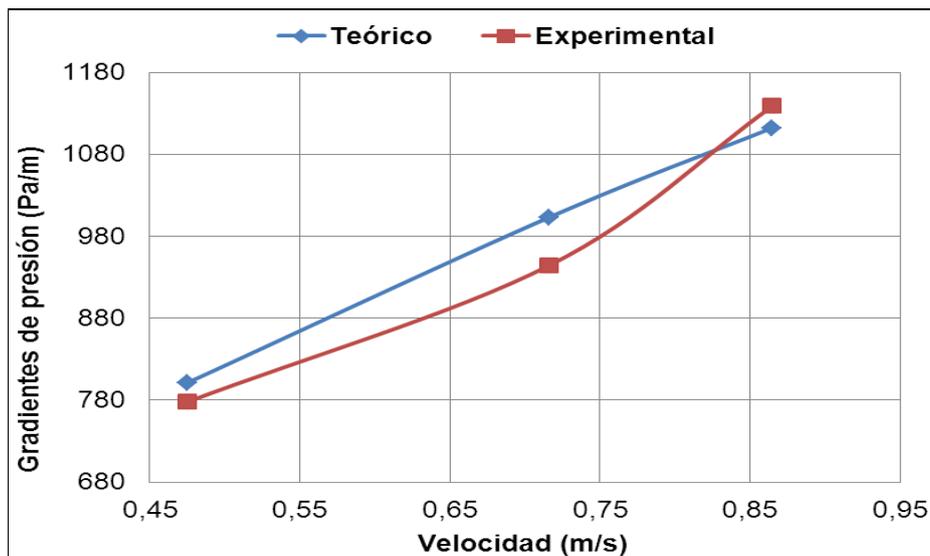
**Tabla 3** - Gradiente de presión para 41 % de sólidos en la pulpa laterítica

$\langle v_z \rangle$ (m/s)	$P_0$ (kPa)	$P_1$ (kPa)	$\Delta P_{exp}/L$ (Pa/m)	$\Delta P_{teo}/L$ (Pa/m)	$E_p$ (%)	$Re_m$	$f$
0,47	70	42	777,77	801,21	3,01	1 203	0,053
0,71	119	85	944,44	1 003,21	6,22	2 184	0,029
0,86	150	109	1 138,88	1 112,32	2,33	2 872	0,022

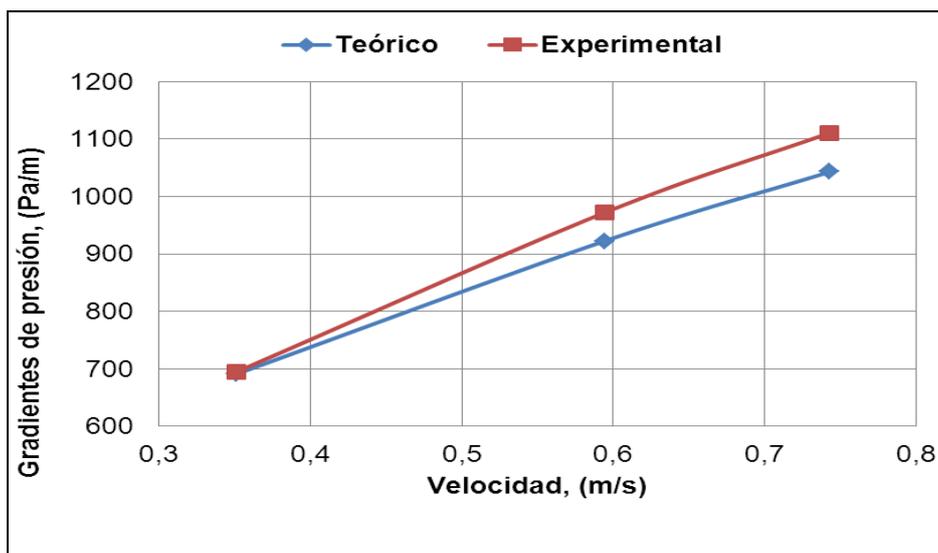
**Tabla 4** - Gradiente de presión para 42,5 % de sólidos en la pulpa laterítica

$\langle v_z \rangle$ (m/s)	$P_0$ (kPa)	$P_1$ (kPa)	$\Delta P_{exp}/L$ (Pa/m)	$\Delta P_{teo}/L$ (Pa/m)	$E_p$ (%)	$Re_m$	$f$
0,35	110	85	694,44	690,77	0,52	772	0,082
0,59	215	180	972,22	922,77	5,08	1 660	0,038
0,79	250	210	1 111,11	1 080,07	2,79	2 517	0,025

En las figuras 3 y 4 se puede observar que el hidrot transporte de la pulpa, por el interior de la tubería, se realiza bajo un régimen de flujo laminar.



**Fig. 3** - Gradiente de presión para 41 % de sólidos en peso.

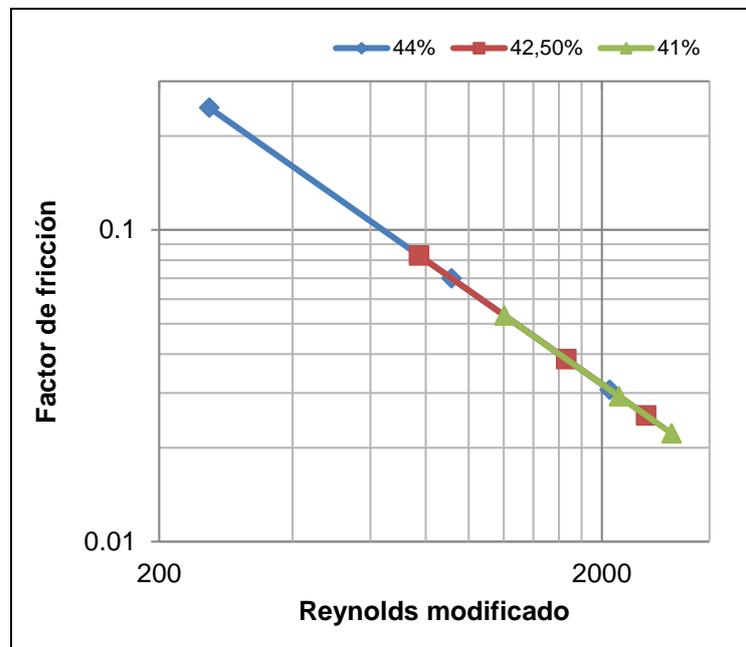


**Fig. 4** - Gradiente de presión para 42,5 % de sólidos en peso.

El error relativo puntual del gradiente de presión teórico, en función de la clasificación reológica de la pulpa, para un modelo Herschel-Bulkley, no superó el 6,2 % con respecto al experimental, a un 41 % de sólidos. Para la pulpa, con 42,5 % de sólidos, no sobrepasó el 5,08 %; obteniéndose una efectividad en la metodología de un 94 % a 95 %, lo que confirma la validez de la misma.

## Correlación entre el coeficiente de fricción y el número de Reynolds modificado

La figura 5 muestra el factor de fricción de Darcy en función del número de Reynolds modificado ( $f=f[R_{em}]$ ) para la pulpa laterítica con 41; 42,5 y 44 % de sólidos en peso. Los valores del factor de fricción y los números de Reynolds se encuentran tabulados en las tablas 3 y 4. Estos valores, para el caso de la pulpa con 44 % de sólidos, se tomaron de [Rodríguez y demás colaboradores \(2016\)](#).



**Fig. 5** - Relación entre el factor de fricción y el número de Reynolds modificado.

La gráfica anterior (figura 5) confirma el hecho conocido de que a medida que aumenta la concentración de sólidos, el número de Reynolds modificado tiende a disminuir y el factor de fricción de Darcy aumenta, por lo que se deduce que estos parámetros son inversamente

proporcionales. Este resultado es de gran valor para el cálculo y diseño de sistemas hidráulicos de transporte de pulpas lateríticas.

### **Análisis de varianza para la caída de presión**

El estadístico  $R^2$  indica que el modelo ajustado explica un 96,31 % de la variabilidad en la caída de presión. La ecuación (3) obtenida del análisis de regresión no es más que un modelo de caída de presión experimental en función de la concentración de sólidos en peso en la pulpa y la velocidad de rotación de la bomba:

$$\Delta P = 108,617 \cdot W_p + 0,173 \cdot n - 1,284 \cdot W_p^2 - 0,00003045 \cdot n^2 - 2359,86 \quad (3)$$

Donde:

$\Delta P$  - Caída de presión en un tramo recto de tubería (kPa);

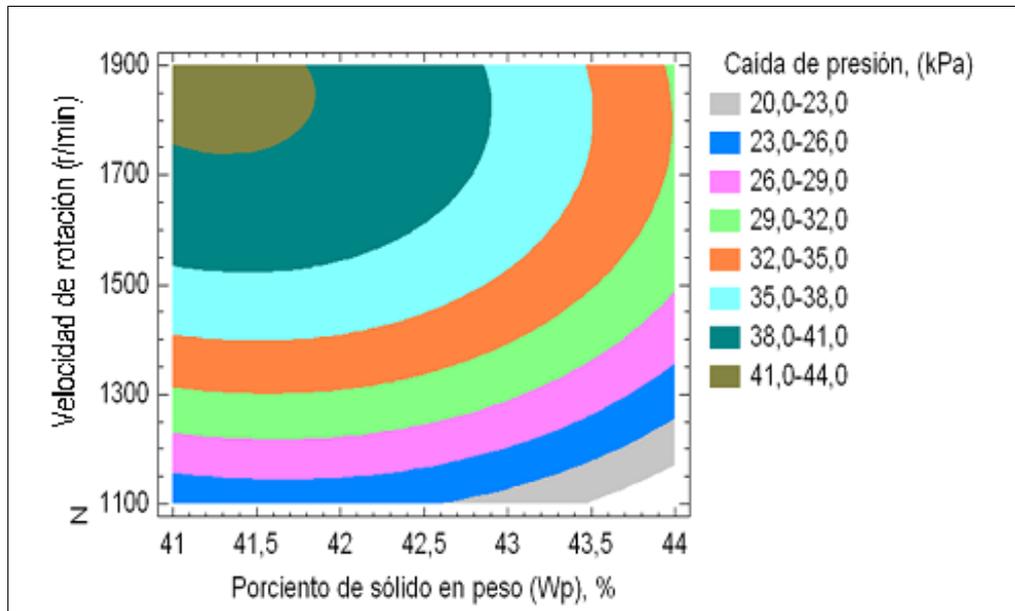
$W_p$  - Porcentaje de sólidos en peso en la pulpa laterítica (%);

$n$  - Velocidad de rotación de la bomba (r/min)

En la figura 6 se muestra el comportamiento de la caída de presión en función de la concentración de sólidos en peso de la pulpa laterítica y la velocidad de rotación de la bomba. Se confirma lo planteado anteriormente en el cálculo de los gradientes de presión, es decir, a medida que disminuyen las concentraciones de sólidos existe un incremento de la caída de presión; esto se debe a que se pudo registrar una mayor velocidad del fluido para concentraciones de sólidos menores, lo que influye, en mayor proporción que la densidad y el factor de fricción, en la caída de presión.

La explicación de este comportamiento puede hallarse en el hecho de que en las bombas centrífugas que impulsan las pulpas lateríticas tiene lugar un aumento de la resistencia que ofrece el fluido dentro de ellas

en la medida en que aumenta su densidad, lo cual se refleja en el flujo volumétrico que ella es capaz de impulsar, y por tanto, en su velocidad.



**Fig. 6** - Gráfico de contorno para la respuesta estimada de caída de presión.

La disminución de concentración de sólidos en peso en la pulpa no solamente provoca un alto consumo energético, sino también un decrecimiento en la eficiencia del transporte de sólidos. Resultados similares han sido reportados por [Pullum \(2007\)](#) quien plantea que una disminución de la concentración de los sólidos provoca un aumento en el gradiente de presión y, por ende, una reducción en la separación de los sólidos.

## **CONCLUSIONES**

- El análisis de la densidad y reología de la pulpa laterítica confirma su comportamiento plástico ajustado a un modelo Herschel-Bulkley, a temperatura ambiente.
- La metodología de cálculo para determinar el gradiente de presión, en el hidrotransporte de la pulpa laterítica, para las condiciones estudiadas, demostró una probabilidad de efectividad de un 94 % a un 95 % en las concentraciones analizadas.
- Se comprobó que en la medida que aumenta la concentración de sólido también lo hace el factor de fricción.
- Se revela que en el caso de las pulpas lateríticas aquí evaluadas según disminuye la concentración de sólidos se evidencia un aumento en la caída de presión debido a un incremento en la tubería de la velocidad del fluido, lo cual indica que esta última ejerce una mayor influencia en la caída de presión que la densidad y el factor de fricción.

### **Agradecimientos**

Los autores desean agradecer la colaboración de los compañeros de los laboratorios de la empresa Comandante Pedro Sotto Alba y del Centro de Investigaciones del Níquel, así como del Instituto Superior Minero Metalúrgico de Moa.

## REFERENCIAS

- Aziz, A. y Mohamed, H. 2013: A Study of the Factors Affecting Transporting Solid-Liquid Suspension through Pipelines. *Open Journal of Fluid Dynamics*, 3(3): 152-162.
- Bird, R.; Stewart, W. y Lidtfoot, E. 1992: *Fenómenos de transporte: un estudio sistemático de los fundamentos del transporte de materia, energía y cantidad de movimiento*. Barcelona: Reverté. 824 p.
- Chhabra, R. y Richardson, J. 2008: *Non-Newtonian Flow and Applied Rheology: Engineering Applications*. 2 ed. UK: Butterworth Heinemann. 501 p.
- Delgado, M. 2004: *Diseño de Experimentos*. Doctoral dissertation, PhD thesis. Instituto Superior Politécnico José Antonio Echevarría, Cuba.
- Hernández, G. 2017: *Modelación de los parámetros reológicos de las pulpas lateríticas y su influencia en el sistema de bombeo*. Arístides Alejandro Legrá Lobaina (Tutor). Tesis doctoral. Instituto Superior Minero Metalúrgico. 126 p.
- Hernández, G.; Martínez, R.; Durán, C. y Pérez, O. 2015: Eficiencia energética en sistemas de bombeo de hidromezclas. *Minería y Geología*, 31(3): 109-127.
- Izquierdo, R. y Nikolaev, A. 1995: Investigación de los parámetros y regímenes racionales de hidrotransporte de las pulpas lateríticas aplicables a las condiciones de explotación de la Empresa Comandante Pedro Sotto Alba. *Minería y Geología*, 12(1): 57-59.
- Izquierdo, R. y Pérez, R. 1995: Investigación de los parámetros y regímenes racionales de hidrotransporte de las pulpas lateríticas

- aplicables a las condiciones de explotación de la Empresa Comandante Pedro Sotto Alba. *Minería y Geología*, 12(2): 31-36.
- Izquierdo, R.; Turro, A. y Nikolaev, A. 2001: Hidrotransporte del mineral laterítico en régimen estructural. *Minería y Geología*, 23(2): 53-59.
- Leyva, B.; Guillen, Y. y Laurencio, H. 2016: Caracterización reológica de un lodo que se genera en el lavado de árido. *Ingeniería Mecánica*, 19(3): 143-149.
- Leyva, B.; Guillen, Y.; Suárez, D.; Martínez, R. e Izquierdo, R. 2016: Influencia de la concentración de sólido en la velocidad de sedimentación de lodo de la industria de áridos. *Minería y Geología*, 32(4): 17-32.
- Pérez, L. y Garcell, L. 2011: Análisis del efecto de las principales variables que determinan el comportamiento reológico de suspensiones limoníticas. *Tecnología Química*, XXXI(3): 106-118.
- Pérez, L.; Garcell, L.; Rojas-Purón, A. R. y Simones, R. 2010: Mineralogía y reología de suspensiones minerales del proceso de lixiviación ácida a presión en Moa, Cuba. *Minería y Geología*, 26(4): 16-35.
- Pullum, L. 2007: Pipeline tailings, pastes and backfill. In: Tenth International Seminar on Paste and Thickend Tailings. Perth, Australia, 13-15 marzo, 113-128.
- Reza, G. 2000: *Flujo de fluidos en válvulas, accesorios y tuberías*. New York: McGraw-Hill. 215 p.
- Rodríguez, M.; Izquierdo, R.; Montero, R. y Williams, M. 2016: Cálculo del gradiente de presión en el hidrotransporte de pulpa laterítica en régimen laminar a través de una tubería horizontal. *Minería y Geología*, 32(4): 49-62.

Shanshi, M. 2004: *Piping calculation manual*. New York: Mc Graw-Hill. 659 p.

Skelland, A. 1970: *Now Newtonian flow and head transfer*. La Habana: Ediciones Revolucionarias. 400 p.

Steffe, J. 1996. *Rheological methods in food process engineering*. 2 ed. East Lansing: Freeman Press. 428 p.