

Distribución adimensional de la temperatura en tubos durante la conducción transitoria bajo condiciones convectivas

Dimensionless distribution of temperature on pipes during transient conduction under convective conditions

Yanan Camaraza-Medina^{1*}, Yamilka Blanco-García², Yoalbys Retirado-Mediaceja²

¹Universidad de Guanajuato, México.

²Universidad de Moa, Holguín, Cuba.

*Autor para la correspondencia: ycamaraza1980@gmail.com

Resumen

Esta investigación propone seis soluciones analíticas para estimar el intercambio de energía por conducción transitoria en tuberías con condiciones de convección. Los modelos desarrollados fueron ajustados para un intervalo R_i/R_E desde 0,2 a 0,8 y números adimensionales de Fourier (Fo) y Biot (Bi), desde 0,05 a 50 y 0,005 a 50, respectivamente. En cada caso fueron computadas 352 distribuciones de temperaturas mediante el método aproximado de Heisler (MH) y los modelos exactos, con diferentes combinaciones de R_i/R_E ; Bi ; Fo . Para la comparación entre las soluciones analíticas y el MH fueron realizadas 2 112 pruebas, revelándose que el MH correlaciona con el método analítico con una desviación media de $\pm 10\%$ para el 70,4 % y de $\pm 20\%$ para el 90,1 % de las combinaciones R_i/R_E ; Bi ; Fo examinadas. El mejor ajuste se encuentra para el Caso 5, con una desviación media de $\pm 10\%$ para el 80,3 % y $\pm 20\%$ para el 91,8 % de los datos utilizados, mientras el peor ajuste se detecta en el Caso 2 con una desviación media de $\pm 10\%$ y $\pm 20\%$ para el 66,7 % y 87,4 % de los datos, respectivamente.

Palabras clave: conducción transitoria; funciones de Bessel; temperatura adimensional

Abstract

This research proposes six analytical solutions to estimate transient conduction energy exchange in pipelines with convective conditions. The models developed were adjusted for an R_i/R_E range from 0.2 to 0.8 and dimensionless Fourier (Fo) and Biot (Bi) numbers, from 0.05 to 50 and 0.005

to 50 respectively. In each case, 352 temperature distributions were computed by approximate Heisler method (MH) and exact models, with different combinations of R_i/R_E ; Bi ; Fo . For comparing the MH and analytical solutions, 2.112 tests were carried out, showing that MH correlates with the analytical method with an average deviation of $\pm 10\%$ for 70.4% and $\pm 20\%$ for 90.1% of the combinations R_i/R_E ; Bi ; Fo examined. The best fit was for Case 5, with an average deviation of $\pm 10\%$ for 80.3% and $\pm 20\%$ for 91.8% of the data used, while the worst fit detected was in Case 2, with average deviation of $\pm 10\%$ and $\pm 20\%$ for 66.7% and 87.4% of the data, respectively.

Keywords: transient conduction; Bessel functions; dimensionless temperature

1. INTRODUCCIÓN

En todo proceso de transferencia de calor debe transcurrir un tiempo para que el intercambio térmico sea estacionario. Al inicio del proceso de calentamiento o enfriamiento, el intercambio de energía será dependiente del tiempo, por ende, es un proceso no estacionario. Un análisis de rigor en un proceso no estacionario requiere considerar los cambios de energía interna del cuerpo con el tiempo, por tanto, el tratamiento matemático requerido muestra una complejidad mayor (Zhang y Zheng, 2023; Zhuo, 2021).

El estudio y análisis de procesos transitorios de calor tienen una gran importancia para diversos campos de ingeniería práctica, fundamentalmente por la cantidad de procesos industriales que requieren del enfriamiento y calentamiento de cuerpos e instalaciones. En muchos procesos de amplio uso en la ingeniería, los cambios de temperaturas en la instalación o objetos de estudio son dependientes del tiempo, entre los más difundidos están los tratamientos térmicos de elementos de máquinas o el enfriamiento de los refractarios de hornos (Zhang *et al.* 2022; Zhang *et al.* 2023; Zhang *et al.* 2024).

En los procesos estacionarios la temperatura generalmente permanece constante, sin embargo, durante la transferencia de calor no estacionaria las temperaturas experimentan cambios apreciables, lo cual es debido al incremento o decremento de la energía interna. Por esta razón, la experimentación de transitorios resulta ser extremadamente costosa (Wu *et al.*, 2021; Xu *et al.*, 2022)

En la actualidad, el perfeccionamiento de las técnicas de cómputo ha permitido el tratamiento analítico de procesos transitorios mediante la simulación de sistemas por computadora, desatancándose la implementación del método de elementos finitos (MEF) o el método de elementos de contorno

(MEC) al intercambio de calor por conducción no estacionaria en configuraciones tridimensionales (3-D). Con un análisis de este tipo se ha logrado predecir los coeficientes de transmisión de calor y simular múltiples aplicaciones industriales sin tener que acudir a la experimentación (Yang *et al.*, 2021; Yu *et al.*, 2021; Nicholas *et al.*, 2023).

Hoy en día se ha difundido el uso de las relaciones/gráficos de Heisler en la evaluación de los transitorios en cuerpos con configuración cilíndrica, extendiendo su uso a tubos, cilindros a presión y otros. Sin embargo, esto se constituye en una limitante importante, pues las condiciones de contorno del problema de Heisler se refieren a superficies cilíndricas sólidas, con convección únicamente por la superficie externa. Por tanto, es de esperar que los resultados obtenidos sean aproximados y en muchas ocasiones los errores computados alcanzan valores de $\pm 25\%$, pudiendo ser mayores aún, sobre todo en tubos de paredes delgadas y longitudes reducidas $L/d \leq 10$ (Tourn *et al.*, 2021; Tan *et al.*, 2022; Tong *et al.*, 2024).

La complejidad matemática de los procesos transitorios de calor es un inconveniente en la actualidad para el desarrollo e implementación de una solución analítica para evaluar la conducción no estacionaria del calor en tuberías. Un estudio analítico de rigor requiere de un refinamiento matemático más allá del adquirido en una formación básica ingenieril, como ortogonalidad, valores propios, transformadas de Fourier y de Laplace, funciones de Bessel y de Neumann, series infinitas múltiples e integrales indefinidas de orden superior (Tsega, 2022; Wu *et al.*, 2021; Wang *et al.*, 2023).

Una solución analítica de la conducción no estacionaria del calor, con frecuencia comprende sumas dobles o triples de series infinitas en un punto específico, convirtiéndose en un reto matemático que de no poseer un sólido dominio de las bases del análisis funcional sería una tarea imposible de realizar, por lo tanto, incluso cuando se disponen de soluciones puntuales en algunos manuales, son suficientemente intimidantes como para ahuyentar o desalentar a los usuarios en perspectiva o novicios. Esta es la razón fundamental de la ausencia de la literatura especializada de soluciones analíticas para computar los transitorios de calor en tuberías (Camaraza-Medina *et al.*, 2020; Zhou *et al.*, 2023).

A partir de lo expuesto con anterioridad, el objetivo de este trabajo es desarrollar un método analítico que permita estimar el intercambio de energía por conducción no estacionaria en tuberías, comparando posteriormente los resultados obtenidos usando el MH y los computados mediante la solución analítica propuesta, para establecer los niveles de correlación y dispersión del

método aproximado con respecto a las soluciones analíticas del problema analizado.

Para establecer comparaciones con respecto a los valores computados mediante el método aproximado de Heisler, fueron establecidos seis casos básicos, en función del criterio de la longitud equivalente L/d y las condiciones de convección. Para cada caso fueron calculadas las soluciones analíticas y aproximadas de 352 ejemplos, utilizando valores diversos de $(R_I/R_E ; Bi ; Fo)$, en el rango $0,2 \leq R_I/R_E \leq 0,8$, $0,005 \leq Bi \leq 50$ y $0,05 \leq Fo \leq 50$.

2. BASES MATEMÁTICAS DEL PROBLEMA DE CONDUCCIÓN TRANSITORIA DEL CALOR

2.1. Longitud equivalente

La longitud equivalente es un criterio muy usado en la evaluación de la transferencia de calor por conducción transitoria, siendo definido de esta manera el carácter unidimensional o tridimensional (3-D) del problema. Para establecer el criterio de longitud equivalente es requerido definir la longitud del cilindro L y su diámetro d , estableciendo un cociente entre ambos en la forma L/d (Can y Keles, 2023).

Cuando se cumple que $L/d \leq 10$, entonces se considera el cilindro como finito, y es requerido considerar el intercambio de energía tanto en las direcciones axial y radial, por tanto, el proceso de transferencia de calor es en 3-D, siendo requerido el uso del criterio de superposición, evaluando la distribución adimensional de temperaturas para el cilindro infinito y la intersección de una placa infinita con un espesor igual a la longitud L (Gao y Nie, 2021; Cetin *et al.*, 2021; Chen *et al.*, 2023).

Cuando se cumple que $L/d > 10$ se considera el cilindro como infinito, y solamente es considerado el intercambio de energía en sentido radial, por tanto, se está en presencia de un proceso de transferencia de calor unidimensional. Esto es lógico, porque cuando una de las dimensiones resulta ser mucho mayor que las restantes, entonces la cantidad de energía transferida en dirección a ese eje ordenado es pequeña en comparación con los restantes, por esta razón, en la ingeniería práctica su efecto es despreciado (Gün y Feng, 2023; Gawronska *et al.*, 2023).

2.2. Consideraciones matemáticas introductorias

Para establecer el modelo se asume que la temperatura inicial es uniforme y que las propiedades termofísicas son constantes. Otra consideración tenida en cuenta es la ausencia de fuentes internas de calor y que existe simetría térmica con respecto al plano medio. Se supone adicionalmente que el coeficiente medio de transferencia de calor por convección es constante y

uniforme (Figura 1). La Ecuación (1) de conducción del calor (Polyanin y Nazaikinskii, 2022) viene dada por:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} + \frac{\check{q}}{\lambda} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad ; \quad \theta_0 = \frac{T_0 - T_F}{T_1 - T_F} \quad (1)$$

Donde: θ es el coeficiente de distribución adimensional de temperaturas. T_1 , T_F , T_0 son las temperaturas medias del cilindro, del medio convectivo y de la sección analizada, respectivamente, en K . α es el coeficiente medio de transferencia de calor, en $W/(m^2 \cdot K)$. λ es la conductividad térmica de la pared del cilindro, $W/(m \cdot K)$. \check{q} es la intensidad de la fuente interna de calor (en caso de existir, en caso contrario $\check{q} = 0$).

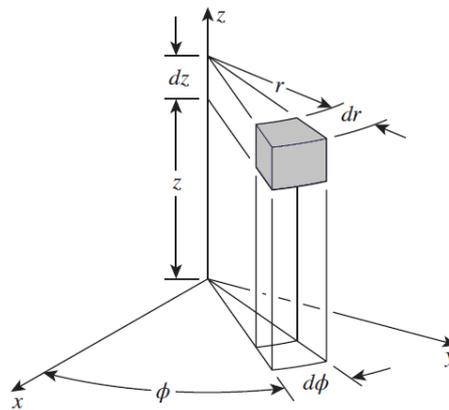


Figura 1. Elemento diferencial de volumen en coordenadas cilíndricas.

La solución de la ecuación de calor en configuraciones cilíndricas requiere el uso de las funciones de Bessel de primera especie, órdenes cero J_0 y uno J_1 ; respectivamente, las cuales son obtenidas mediante el siguiente desarrollo en series, reflejado en las Ecuaciones (2) y (3) (Peng y Cheng, 2020; Azis et al., 2023):

$$J_0(x) = 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{4^2(2!)^2} - \frac{x^6}{4^3(3!)^2} + \dots - (-1)^n \frac{x^{2n}}{4^n(n!)^2} \quad (2)$$

$$J_1(x) = \frac{x}{2} - \frac{x^3}{2^4} + \frac{x^5}{2^5\{2!(2+1)!\}} - \frac{x^7}{2^7\{3!(3+1)!\}} + \dots - (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2^{2n+1}\{n!(n+1)!\}} \quad (3)$$

En las Ecuaciones (2) y (3) la variable $n = 0, 1, 2, 3, \dots$, son valores enteros. Las funciones de Bessel de segunda especie, órdenes cero y uno (Y_0, Y_1) vienen dadas por la Ecuación (4) (Ji *et al.*, 2023; Jin *et al.*, 2022):

$$Y_n(x) = \frac{J_n(x) \cos(nx) - (-1)^n J_n(x)}{\sin(nx)} \quad (4)$$

En la Tabla 1 son resumidos los valores de J_0, J_1, Y_0, Y_1 para distintos valores de x .

Tabla 1. Valores de las funciones de Bessel J_0, J_1, Y_0, Y_1 para distintos valores de x

x	$J_0(x)$	$J_1(x)$	$Y_0(x)$	$Y_1(x)$	x	$J_0(x)$	$J_1(x)$	$Y_0(x)$	$Y_1(x)$
0	1	0	$-\infty$	$-\infty$	5,25	-0,0931	-0,345	-0,3348	0,0619
0,25	0,9844	0,124	-0,9316	-2,7041	5,5	-0,0068	-0,3414	-0,3395	-0,0238
0,5	0,9385	0,2423	-0,4445	-1,4715	5,75	0,076	-0,3179	-0,3233	-0,1042
0,75	0,8642	0,3352	-0,1372	-1,0376	6	0,1506	-0,2767	-0,2882	-0,175
1	0,7652	0,4401	0,0883	-0,7812	6,25	0,2131	-0,2207	-0,2369	-0,2326
1,25	0,6459	0,5106	0,2582	-0,5844	6,5	0,2601	-0,1538	-0,1732	-0,2741
1,5	0,5118	0,5579	0,3824	-0,4123	6,75	0,2895	-0,0803	-0,1014	-0,2977
1,75	0,369	0,5802	0,4655	-0,254	7	0,3001	-0,0047	-0,0259	-0,3027
2	0,2239	0,5767	0,5104	-0,107	7,25	0,292	0,0686	0,0484	-0,2893
2,25	0,0827	0,5484	0,5201	0,0272	7,5	0,2663	0,1352	0,1173	-0,2591
2,5	-0,0484	0,4971	0,4981	0,1459	7,75	0,2252	0,1916	0,1768	-0,2143
2,75	-0,1641	0,426	0,4487	0,246	8	0,1717	0,2346	0,2235	-0,1581
3	-0,2601	0,3391	0,3769	0,3247	8,25	0,1092	0,2622	0,2551	-0,094
3,25	-0,3328	0,2411	0,2883	0,3798	8,5	0,0419	0,2731	0,2702	-0,0262
3,5	-0,3801	0,1374	0,189	0,4102	8,75	-0,0259	0,2672	0,2683	0,0413
3,75	-0,4014	0,0332	0,0853	0,4159	9	-0,0903	0,2453	0,2499	0,1043
4	-0,3971	-0,066	-0,0169	0,3979	9,25	-0,1474	0,2091	0,2168	0,1593
4,25	-0,3692	-0,1556	-0,1119	0,3586	9,5	-0,1939	0,1613	0,1712	0,2032
4,5	-0,3205	-0,2311	-0,1947	0,301	9,75	-0,2273	0,1048	0,1163	0,2336
4,75	-0,2551	-0,2892	-0,2612	0,2292	10	-0,2459	0,0435	0,0557	0,249
5	-0,1776	-0,3276	-0,3085	0,1479					

Las funciones modificadas de Neumann de primera especie y orden cero y uno vienen dadas por las ecuaciones (5) y (6) (Hua *et al.*, 2018; Huang *et al.*, 2023):

$$N_0(\omega_n r) = \{J_0(\omega_n r)Y_0'(\omega_n R_E) - J_0'(\omega_n R_E)Y_0(\omega_n r)\} \quad (5)$$

$$N_1(\omega_n r) = J_0(\omega_n r)\{\omega_n Y_0'(\omega_n R_I) - b_1 Y_0(\omega_n R_I)\} - Y_0(\omega_n r)\{\omega_n J_0'(\omega_n R_I) - b_1 J_0(\omega_n R_I)\} \quad (6)$$

Donde: J_0' , Y_0' son las derivadas de las funciones de Bessel de primera y segunda especie, orden cero.

Los valores de J_0' y Y_0' son obtenidos mediante la relación de recurrencia, obteniendo (7) y (8):

$$J_N'(\omega_n r) = \frac{N}{\omega_n r} J_N(\omega_n r) - J_{N+1}(\omega_n r) \rightarrow J_0'(\omega_n r) = -J_1(\omega_n r) \quad (7)$$

$$Y_N'(\omega_n r) = \frac{N}{\omega_n r} Y_N(\omega_n r) - Y_{N+1}(\omega_n r) \rightarrow Y_0'(\omega_n r) = -Y_1(\omega_n r) \quad (8)$$

2.3. Solución aproximada de Heisler (MH)

En un cilindro infinito la distribución adimensional de temperaturas puede ser expresada mediante una función (9): $\theta = f(r)$:

$$\theta = C_1 e^{-\omega^2 \tau} J_0(\omega r) \quad (9)$$

Donde: τ es el número adimensional de Fourier, ωr es el eigenvalor o raíz característica.

En la Ecuación (9) se establecen las siguientes condiciones de contorno (10) y (11):

$$\text{Para } t = 0 ; 0 \leq r \leq R ; \theta = f(r) \rightarrow \theta = T_0 \quad (10)$$

$$\text{Para } t \geq 0 ; \left. \frac{\partial \theta}{\partial r} \right|_{r=R} = -\frac{\alpha}{\lambda} T \quad (11)$$

Usando las relaciones de recurrencia la derivada de la función J_0 es expresada mediante la siguiente relación (12):

$$\frac{\partial}{\partial r} J_0(\omega_n r) = -\omega_n J_1(\omega_n r) \quad (12)$$

Para computar los eigenvalores $\omega_n = \omega_n r$ se sustituye la Ecuación (11) en la Ecuación (12) y se obtiene (13):

$$-\frac{\alpha}{\lambda} (e^{-\omega_n^2 \tau} \{-\omega_n J_1(\omega_n r)\}_{r=R}) \rightarrow \omega_n \frac{J_0(\omega_n)}{J_1(\omega_n)} Bi \quad (13)$$

Donde: α es el coeficiente medio de transferencia de calor, $W/(m^2 \cdot K)$. λ es la conductividad térmica de la pared del cilindro, $W/(m \cdot K)$. Bi es el número adimensional de Biot.

La Ecuación (13) es de tipo trascendente, por lo cual es requerido resolverla numéricamente. Se aprecia que existen n valores de ω_n que satisfacen la Ecuación (13), por lo tanto, la distribución de temperaturas debe ser expresada en forma de una serie infinita, quedando (14):

$$\theta = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\omega_n^2 \tau} J_0(\omega_n r) \quad (14)$$

Sustituyendo la Ecuación (9) en la Ecuación (14) resulta (15):

$$f(r) = \theta = \sum_{n=1}^{\infty} C_n J_0(\omega_n r) = C_1 J_0(\omega_1 r) + C_2 J_0(\omega_2 r) + \dots + C_n J_0(\omega_n r) \quad (15)$$

Para que se cumpla la Ecuación (15) es necesario que las funciones $J_0(\omega_1 r)$, $J_0(\omega_2 r), \dots, J_0(\omega_n r)$, formen un agrupamiento ortogonal en el intervalo $0 \leq r \leq R$, por tanto (16):

$$\int_0^R r J_0(\omega_i r) J_0(\omega_j r) dr = 0 \quad ; \quad i \neq j \quad (16)$$

La serie infinita dada en la Ecuación (15) es integrable y convergente, por tanto (17):

$$\int_0^R r f(r) J_0(\omega_n r) dr = C_1 \int_0^R r J_0(\omega_1 r) J_0(\omega_n r) dr + C_2 \int_0^R r J_0(\omega_2 r) J_0(\omega_n r) dr + \dots + C_n \int_0^R r J_0^2(\omega_n r) dr \quad (17)$$

Por definición de ortogonalidad, en la Ecuación (17) se cumple que (18):

$$\int_0^R r f(r) J_0(\omega_n r) dr = C_n \int_0^R r J_0^2(\omega_n r) dr \quad (18)$$

Despejando la constante C_n en la Ecuación (19), integrando y sustituyendo posteriormente en la Ecuación (15):

$$\theta = \frac{2\alpha R}{\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\omega_n^2 \tau} J_0(\omega_n r) J_1(\omega_n)}{\omega_n [J_0^2(\omega_n r) + J_1^2(\omega_n r)]} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 J_1(\omega_n)}{\omega_n [J_0^2(\omega_n) + J_1^2(\omega_n)]} e^{-\omega_n^2 \tau} J_0\left(\frac{\omega_n r}{R}\right) \quad (19)$$

En la Ecuación (19), los eigenvalores $\omega_n = \omega_n R$ vienen dados por la Ecuación (13). Si fuese considerada la intensidad de una fuente interna de calor \check{q} , la Ecuación (19) se transforma a la siguiente relación (20):

$$\theta = \check{q} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\omega_n^2 J_0^2(\omega_n) + J_1^2(\omega_n)} (1 - e^{-\omega_n^2 \tau}) J_0\left(\frac{\omega_n r}{R}\right) \quad (20)$$

La Ecuación (20) es válida para cilindros sólidos e infinitos, sin fuentes internas de calor. En ingeniería la Ecuación (20) es extendida a la evaluación de transitorios de calor por conducción en tuberías, suponiendo que el flujo de calor por convección en el interior es equivalente a una fuente interna de calor, siendo determinada la intensidad de la fuente aplicando la siguiente relación (21):

$$\check{q} = \alpha \frac{(T_{F2} - T_{F1})}{\ln\left(\frac{T_P - T_{F1}}{T_P - T_{F2}}\right)} \pi L (R_E + R_I) \quad (21)$$

Donde: R_E, R_I son los radios externo e interno del tubo, en m. L es la longitud del tubo, en m. T_{F1}, T_{F2} son las temperaturas medias del fluido a la entrada y salida del tubo, respectivamente, en K. T_P es la temperatura media de la pared del tubo al inicio del proceso de intercambio de energía, en K.

En los tubos que cumplan la condición $L/d \leq 10$, la Ecuación (20) es modificada (22) para considerar el efecto del intercambio de energía en sentido axial:

$$\theta_{(d,L)} = \check{q} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\omega_n^2 J_0^2(\omega_n) + J_1^2(\omega_n)} (1 - e^{-\omega_n^2 \tau}) J_0\left(\frac{\omega_n r}{R}\right) \times \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4 \sin(\omega_m)}{2\omega_m + \sin(2\omega_m)} (e^{-\omega_m^2 \tau}) \cos\left(\frac{\omega_m z}{L}\right) \quad (22)$$

Donde: z es la distancia en sentido axial entre la sección evaluada y el origen de coordenadas, en m. L es la longitud en sentido axial, en m.

En la Ecuación (22), los eigenvalores ω_m vienen dados por (23):

$$Bi = \omega_m \tan(\omega_m) \quad (23)$$

Las Ecuaciones (20) y (22) son válidas solo para un cilindro sometido a convección por la superficie externa, sin embargo, en un tubo la convección puede ocurrir simultáneamente en ambas superficies, o de forma individual por las superficies internas o externas. Además, la posibilidad de presencia de aislamiento térmico en la tubería complejiza el problema, pues el aislamiento

debe ser considerado como un plano adiabático o de simetría térmica. Por tanto, el uso de las Ecuaciones (20) y (22) para computar la transferencia de calor por conducción no estacionaria en tuberías puede arrojar valores con una dispersión de $\pm 20\%$.

2.4. Desarrollo de las soluciones exactas

2.4.1 Definición de los casos

En la evaluación de transitorios de calor en tuberías con condiciones de contorno de convección es posible definir seis casos básicos, utilizado para este propósito el criterio de longitud equivalente. Los casos son:

Caso 1: Tubo infinito, convección por dentro y aislado térmicamente por fuera.

Caso 2: Tubo infinito, convección por fuera y aislado por dentro.

Caso 3: Tubo infinito, convección por dentro y por fuera simultáneamente.

Caso 4: Tubo finito, convección por dentro y aislado térmicamente por fuera.

Caso 5: Tubo finito, convección por fuera y aislado por dentro.

Caso 6: Tubo finito, convección por dentro y por fuera simultáneamente.

En la Figura 2 son mostradas las notaciones usadas para las configuraciones geométricas y las condiciones de contorno correspondientes a los casos del 1 al 6.

Caso 1

La distribución adimensional de temperaturas para el Caso 1 viene dada por (24):

$$\theta_{(1)} = \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} M(e^{-\omega_n^2 \tau}) \frac{\omega_n^2 \{N_0(\omega_n r)\} \{\omega_n J'_0(\omega_n R_I) + a_1 J_0(\omega_n R_I)\}^2}{\{\omega_n J'_0(\omega_n R_I) + a_1 J_0(\omega_n R_I)\}^2 - (\omega_n^2 + a_1^2) J_0^2(\omega_n R_E)} \quad (24)$$

Donde: M es la función de distribución adimensional de temperaturas.

En la Ecuación (24) se aplican las siguientes condiciones de contorno para $t \geq 0$

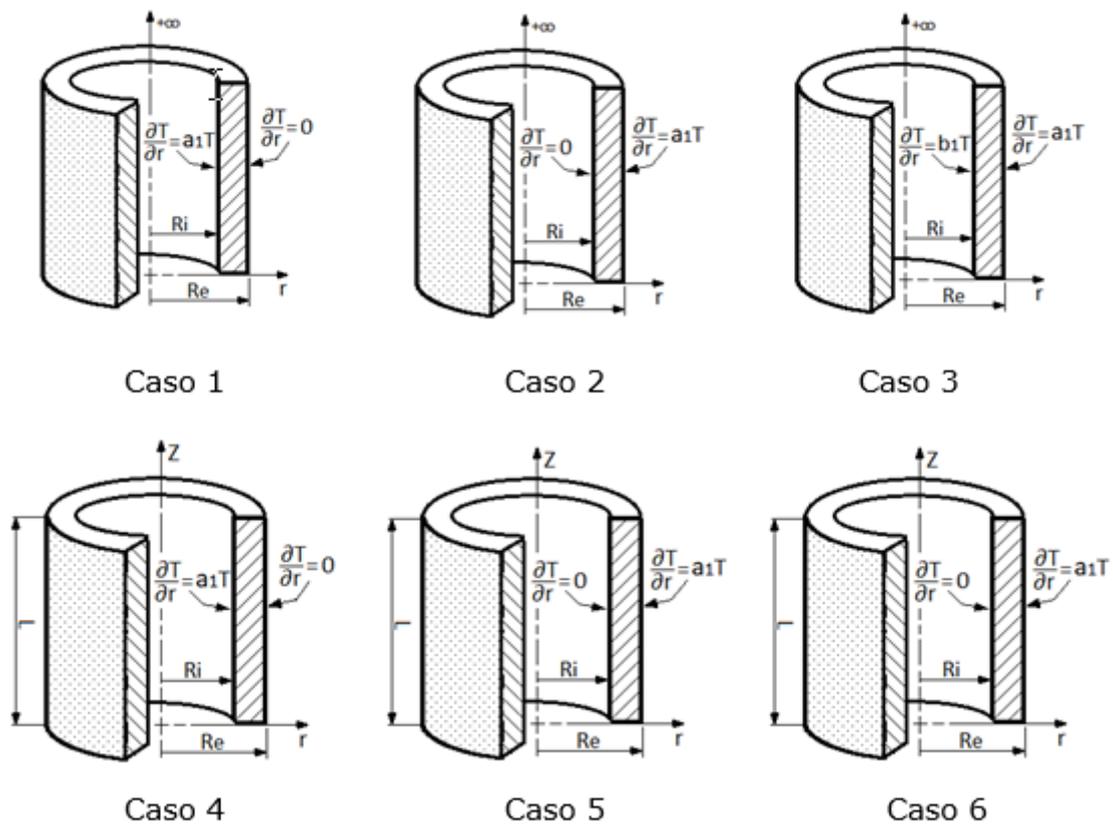


Figura 2. Notaciones usadas para las configuraciones geométricas y las condiciones de contorno correspondientes a los casos del 1 al 6.

En la Ecuación (24) el valor de la constante a_1 se determina mediante las condiciones de contorno dadas en la Ecuación (25), mientras que los eigenvalores ω_n vienen dados por (26):

$$\begin{cases} r = R_I ; & \frac{\partial \theta}{\partial r} \Big|_{r=R_I} = a_1 \theta = \frac{\alpha}{\lambda} \theta \\ r = R_E ; & \frac{\partial \theta}{\partial r} \Big|_{r=R_E} = 0 \end{cases} \quad (25)$$

$$\frac{J'_0(\omega_n R_E) \{ \omega_n Y_0(\omega_n R_I) + a_1 Y_0(\omega_n R_I) \}}{Y'_0(\omega_n R_E) \{ \omega_n J_0(\omega_n R_I) + a_1 J_0(\omega_n R_I) \}} = 1 \quad (26)$$

Los valores de la función M usada en la Ecuación (24) pueden ser obtenidos mediante la siguiente relación (27):

$$M = \int_{R_I}^{R_E} \theta_0 \{ N_0(\omega_n r) \} r \, dr \quad (27)$$

En la Ecuación (27) los valores de θ_0 y $N_0(\omega_n r)$ son obtenidos mediante las ecuaciones (1) y (5), respectivamente.

Caso 2

La distribución adimensional de temperaturas para este Caso viene dada por (28):

$$\theta_{(2)} = \frac{\pi^2}{2} \sum_{n=1}^{\infty} M(e^{-\omega_n^2 \tau}) \frac{\{N_0(\omega_n r)\} \omega_n^2 \{\omega_n J'_0(\omega_n R_E) + a_1 J_0(\omega_n R_E)\}^2}{\{\omega_n J'_0(\omega_n R_E) + a_1 J_0(\omega_n R_E)\}^2 - (\omega_n^2 + a_1^2) J_0^2(\omega_n R_E)} \quad (28)$$

En la Ecuación (28) se aplican las siguientes condiciones de contorno (29) para $t \geq 0$

$$\begin{cases} r = R_E ; \quad \frac{\partial \theta}{\partial r} \Big|_{r=R_E} = a_1 \theta = \frac{\alpha}{\lambda} \theta \\ r = R_I ; \quad \frac{\partial \theta}{\partial r} \Big|_{r=R_I} = 0 \end{cases} \quad (29)$$

En la Ecuación (28) el valor de la constante a_1 se determina mediante las condiciones de contorno dadas en la Ecuación (29), mientras que los eigenvalores ω_n vienen dados por (30):

$$\frac{J'_0(\omega_n R_E) \{\omega_n Y_0(\omega_n R_I) + a_1 Y_0(\omega_n R_I)\}}{Y'_0(\omega_n R_E) \{\omega_n J_0(\omega_n R_I) + a_1 J_0(\omega_n R_I)\}} = 1 \quad (30)$$

En la Ecuación (28), las funciones M y $N_0(\omega_n r)$ son computadas usando las Ecuaciones (27) y (5), respectivamente, mientras que los eigenvalores ω_n vienen dados por (31):

$$\frac{J'_0(\omega_n R_E) \{\omega_n Y_0(\omega_n R_I) + a_1 Y_0(\omega_n R_I)\}}{Y'_0(\omega_n R_E) \{\omega_n J_0(\omega_n R_I) + a_1 J_0(\omega_n R_I)\}} = 1 \quad (31)$$

Caso 3

La distribución adimensional de temperaturas para el Caso 3 viene dada por (32):

$$\theta_{(3)} = \frac{\pi^2}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (e^{-\omega_n^2 \tau}) \frac{M_1 \{N_1(\omega_n r)\} \omega_n^2 \{\omega_n J'_0(\omega_n R_E) + b_1 J_0(\omega_n R_E)\}^2}{(\omega_n^2 + b_1^2) \{\omega_n J'_0(\omega_n R_I) + b_1 J_0(\omega_n R_I)\}^2 - (\omega_n^2 + a_1^2) \{\omega_n J'_0(\omega_n R_E) + a_1 J_0(\omega_n R_E)\}^2} \quad (32)$$

En la Ecuación (32) se aplican las siguientes condiciones de contorno (33) para $t \geq 0$

$$\begin{cases} r = R_E ; \quad \frac{\partial \theta}{\partial r} \Big|_{r=R_E} = a_1 \theta = \frac{\alpha_E}{\lambda} \theta \\ r = R_I ; \quad \frac{\partial \theta}{\partial r} \Big|_{r=R_I} = b_1 \theta = \frac{\alpha_I}{\lambda} \theta \end{cases} \quad (33)$$

En la Ecuación (32) el valor de las constantes a_1 y b_1 se determinan mediante las condiciones de contorno dadas en la Ecuación (33), mientras que los eigenvalores ω_n vienen dados por (34):

$$\frac{\{\omega_n Y_0'(\omega_n R_I) - b_1 Y_0(\omega_n R_I)\} \{\omega_n J_0'(\omega_n R_E) + b_1 J_0(\omega_n R_E)\}}{\{\omega_n Y_0'(\omega_n R_E) + a_1 Y_0(\omega_n R_E)\} \{\omega_n J_0'(\omega_n R_I) - b_1 J_0(\omega_n R_I)\}} = 1 \quad (34)$$

En la Ecuación (32) la función M_1 es computada mediante la Ecuación (27), usando $N_1(\omega_n r)$ en lugar de $N_0(\omega_n r)$. Los valores de $N_1(\omega_n r)$ son obtenidos mediante la Ecuación (6).

Caso 4

La distribución adimensional de temperaturas para el Caso 4 viene dada por (35):

$$\theta_{(4)} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega_n^2 \{N_0(\omega_n r)\} \{\omega_n J_0'(\omega_n R_I) + a_1 J_0(\omega_n R_I)\}^2}{\{\omega_n J_0'(\omega_n R_I) + a_1 J_0(\omega_n R_I)\}^2 - (\omega_n^2 + a_1^2) J_0^2(\omega_n R_E)} \times \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sin(\eta z)}{2m+1} (e^{-\sigma^2 \tau}) M \quad (35)$$

En la Ecuación (35) se aplican las siguientes condiciones de contorno (36) para $t \geq 0$

$$\begin{cases} r = R_I ; \quad \frac{\partial \theta}{\partial r} \Big|_{r=R_I} = a_1 \theta = \frac{\alpha}{\lambda} \theta \\ r = R_E ; \quad \frac{\partial \theta}{\partial r} \Big|_{r=R_E} = 0 \end{cases} \quad (36)$$

El valor de la constante a_1 en la Ecuación (35) se determina mediante las condiciones de contorno dadas en la Ecuación (36), las funciones M y $N_0(\omega_n r)$ son computadas usando las Ecuaciones (27) y (5), respectivamente, mientras que los eigenvalores ω_n , η y σ vienen dados por (37) y (38):

$$\frac{J_0'(\omega_n R_E) \{\omega_n Y_0(\omega_n R_I) + a_1 Y_0(\omega_n R_I)\}}{Y_0'(\omega_n R_E) \{\omega_n J_0(\omega_n R_I) + a_1 J_0(\omega_n R_I)\}} = 1 \quad (37)$$

$$\eta = \frac{(2m+1)}{L} ; \quad \sigma^2 = \eta^2 + \omega_n^2 \quad (38)$$

Donde: L es la longitud del tubo, en m .

Caso 5

La distribución adimensional de temperaturas para el Caso 5 viene dada por (39):

$$\theta_{(5)} = 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\{N_0(\omega_n r)\} \omega_n^2 \{\omega_n J'_0(\omega_n R_E) + a_1 J_0(\omega_n R_E)\}^2}{\{\omega_n J'_0(\omega_n R_E) + a_1 J_0(\omega_n R_E)\}^2 - (\omega_n^2 + a_1^2) J_0^2(\omega_n R_E)} \times \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sin(\eta z)}{2m+1} (e^{-\sigma^2 \tau}) M \quad (39)$$

En la Ecuación (39) se aplican las siguientes condiciones de contorno (40) para $t \geq 0$

$$\begin{cases} r = R_E ; & \frac{\partial \theta}{\partial r} \Big|_{r=R_E} = a_1 \theta = \frac{\alpha}{\lambda} \theta \\ r = R_I ; & \frac{\partial \theta}{\partial r} \Big|_{r=R_I} = 0 \end{cases} \quad (40)$$

El valor de la constante a_1 en la Ecuación (39) se determina mediante las condiciones de contorno dadas en la Ecuación (40), las funciones M y $N_0(\omega_n r)$ son computadas usando las Ecuaciones (27) y (5), respectivamente, los eigenvalores σ y η son obtenidos mediante la Ecuación (38), mientras que el eigenvalor ω_n viene dados por (41):

$$\frac{J'_0(\omega_n R_E) \{\omega_n Y_0(\omega_n R_I) + a_1 Y_0(\omega_n R_I)\}}{Y'_0(\omega_n R_E) \{\omega_n J_0(\omega_n R_I) + a_1 J_0(\omega_n R_I)\}} = 1 \quad (41)$$

Caso 6

La distribución adimensional de temperaturas para el Caso 6 viene dada por (42):

$$\theta_{(6)} = 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M_1 \{N_1(\omega_n r)\} \omega_n^2 \{\omega_n J'_0(\omega_n R_E) + b_1 J_0(\omega_n R_E)\}^2}{(\omega_n^2 + b_1^2) \{\omega_n J'_0(\omega_n R_I) + b_1 J_0(\omega_n R_I)\}^2 - (\omega_n^2 + a_1^2) \{\omega_n J'_0(\omega_n R_E) + a_1 J_0(\omega_n R_E)\}^2} \times \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sin(\eta z)}{2m+1} (e^{-\sigma^2 \tau}) M_1 \quad (42)$$

En la Ecuación (42) se aplican las siguientes condiciones de contorno (43) para $t \geq 0$

$$\begin{cases} r = R_E ; & \frac{\partial \theta}{\partial r} \Big|_{r=R_E} = a_1 \theta = \frac{\alpha_E}{\lambda} \theta \\ r = R_I ; & \frac{\partial \theta}{\partial r} \Big|_{r=R_I} = b_1 \theta = \frac{\alpha_I}{\lambda} \theta \end{cases} \quad (43)$$

En la Ecuación (42) el valor de las constantes a_1 y b_1 se determinan mediante las condiciones de contorno dadas en la Ecuación (43), la función M_1 es computada mediante la Ecuación (27), usando $N_1(\omega_n r)$ en lugar de $N_0(\omega_n r)$. Los valores de $N_1(\omega_n r)$ son obtenidos mediante la Ecuación (6). Los

eigenvalores σ y η son obtenidos mediante la Ecuación (38), mientras que el eigenvalor ω_n viene dados por (44):

$$\frac{\{\omega_n Y_0'(\omega_n R_I) - b_1 Y_0(\omega_n R_I)\} \{\omega_n J_0'(\omega_n R_E) + b_1 J_0(\omega_n R_E)\}}{\{\omega_n Y_0'(\omega_n R_E) + a_1 Y_0(\omega_n R_E)\} \{\omega_n J_0'(\omega_n R_I) - b_1 J_0(\omega_n R_I)\}} = 1 \quad (44)$$

3. ANALISIS DE RESULTADOS

3.1. Comparación del MH con las soluciones exactas

La elevada complejidad matemática de las soluciones analíticas es la razón principal por la cual en la actualidad en la ingeniería práctica es preferido el uso del MH para estimar los valores $\theta_{(n)}$ durante la conducción transitoria del calor en tuberías, sin embargo, su uso introduce una elevada dispersión en los resultados computados. En este trabajo se proporciona una comparación entre el MH y las soluciones exactas obtenidas para cada caso.

A pesar de la complejidad de las soluciones analíticas propuestas, para cada caso fue computada la distribución adimensional de temperaturas $\theta_{(n)}$ correspondiente a 352 combinaciones de $(R_I/R_E ; Bi ; Fo)$. Para la relación de diámetros R_I/R_E fueron usados cuatro valores (0,2 ; 0,4 ; 0,6 ; 0,8), para el número adimensional de BiB se fijaron once valores (0,005 ; 0,01 ; 0,05 ; 0,1 ; 0,5 ; 1 ; 2 ; 5 ; 10 ; 25 ; 50), mientras que para el número adimensional de Fo fueron usados ocho valores (0,05 ; 0,1 ; 0,5 ; 1 ; 5 ; 10 ; 30 ; 50). Para la comparación en los casos del 1 al 3 se utilizaron las soluciones aproximadas obtenidas con la Ecuación (22), mientras que para los Casos 4 al 6 las aproximaciones fueron computadas mediante la Ecuación (19).

Para los casos del 1 al 3 el porcentaje de desviación (error) respecto a la solución analítica es obtenido mediante la relación (45):

$$D_{\%} = 100 \cdot \left(\frac{\theta - \theta_{(1-3)}}{\theta} \right) \quad (45)$$

Donde: θ y $\theta_{(1-3)}$ son las distribuciones adimensionales de temperaturas calculadas con la Ecuación (22) y del caso evaluado (1 - 3), respectivamente.

Para los Casos del 4 al 6 el porcentaje de desviación (error) respecto a la solución analítica es obtenido mediante la relación (46):

$$D_{\%} = 100 \cdot \left(\frac{\theta - \theta_{(4-6)}}{\theta} \right) \quad (46)$$

Donde: θ y $\theta_{(4-6)}$ son las distribuciones adimensionales de temperaturas calculadas con las Ecuación (19) y del caso evaluado (4-6), respectivamente.

En la Figura 3 se grafican los valores $D_{\%}$ para los casos 1, 2 y 3 -calculados mediante la Ecuación (45)- y en la Figura 4 los correspondientes a los casos 4, 5 y 6 -calculados mediante la Ecuación (46). En todos los casos los resultados fueron graficados en función de la combinación del producto $\{(R_I/R_E) \times Bi \times Fo\}^{0.1}$, ajustado los resultados obtenidos en bandas de error de $\pm 10\%$ y $\pm 20\%$.

En la comparación realizada entre el MH y el método analítico desarrollado fueron realizadas 2 112 pruebas, detectando que el MH correlaciona con el método analítico con una desviación media de $\pm 10\%$ y $\pm 20\%$ para el 70,4 % y 90,1 %, respectivamente, de las combinaciones R_I/R_E ; Fo ; Bi examinadas.

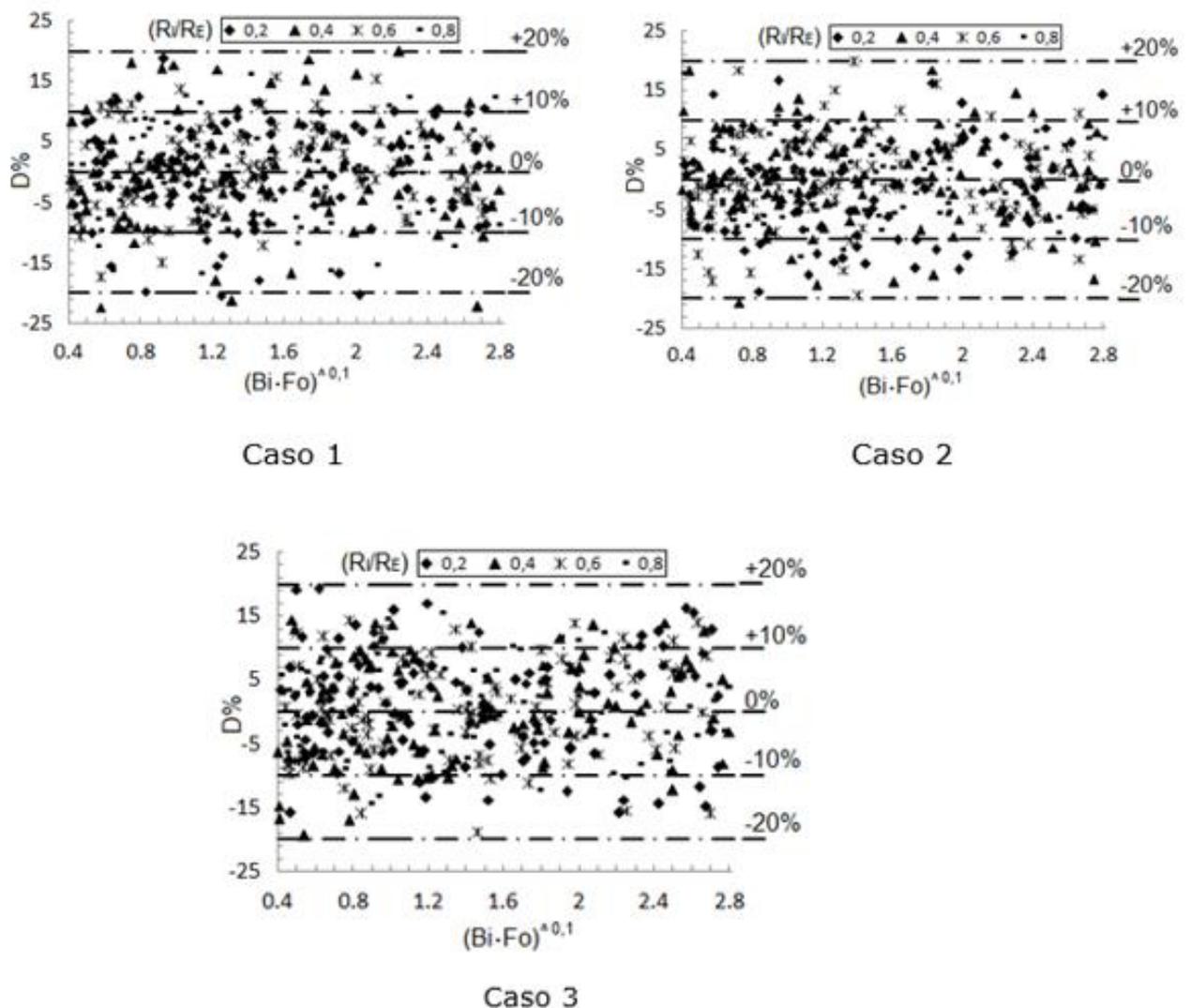


Figura 3. Valores $D_{\%}$ calculados para los casos 1, 2 y 3.

Para el Caso 1 (Figura 3) fue detectada una desviación media de $\pm 10\%$ y $\pm 20\%$ para el 72,4 % y 88,1 % de los test examinados, respectivamente. El mejor ajuste individual fue encontrado para $R_I/R_E = 0,4$ con un error medio de $\pm 10\%$ y $\pm 20\%$ para el 92,6 % y 97,2 % de los datos correlacionados, respectivamente, mientras el peor ajuste fue computado para $R_I/R_E = 0,6$, con una desviación media de $\pm 10\%$ para el 45,3 % y $\pm 20\%$ para el 80,6 % de los test realizados.

Para el Caso 2 (Figura 3) fue computado un error medio de $\pm 10\%$ y $\pm 20\%$ para el 66,7 % y 87,4 % de los datos utilizados, respectivamente. El mejor ajuste fue obtenido para $R_I/R_E = 0,8$ con un error medio de $\pm 10\%$ y $\pm 20\%$ para el 84,6 % y 92,3 % de los test realizados, respectivamente, mientras el peor ajuste fue encontrado para $R_I/R_E = 0,2$ con un error medio de $\pm 10\%$ para el 44,6 % y $\pm 20\%$ para el 83,1 % de los datos evaluados.

Para el Caso 3 (Figura 3) fue detectada una desviación media de $\pm 10\%$ y $\pm 20\%$ para el 73,7 % y 92,9 % de los test evaluados, respectivamente. El mejor ajuste individual fue encontrado para $R_I/R_E = 0,6$ con un error medio de $\pm 10\%$ y $\pm 20\%$ para el 91,8 % y 96,3 % de los datos correlacionados, respectivamente, mientras el peor ajuste fue computado para $R_I/R_E = 0,2$, con un error medio de $\pm 10\%$ y $\pm 20\%$ para el 47,1 % y 85,7 % de los test realizados, respectivamente.

Para el Caso 4 (Figura 4) fue computado un error medio de $\pm 10\%$ y $\pm 20\%$ para el 76,1 % y 91,7 % de los datos utilizados, respectivamente. El mejor ajuste fue obtenido para $R_I/R_E = 0,2$ con un error medio de $\pm 10\%$ y $\pm 20\%$ para el 89,3 % y 98,3 % de los test realizados, correspondientemente, mientras el peor ajuste fue encontrado para $R_I/R_E = 0,4$ con un error medio de $\pm 10\%$ y $\pm 20\%$ para el 41,5 % y 76,2 % de los datos evaluados, respectivamente.

Para el Caso 5 (Figura 4) fue detectada una desviación media de $\pm 10\%$ y $\pm 20\%$ para el 80,3 y 91,8% de los test examinados, respectivamente. El mejor ajuste individual fue encontrado para $R_I/R_E = 0,4$ con un error medio de $\pm 10\%$ y $\pm 20\%$ para el 86,4 % y 95,2 % de los datos correlacionados, correspondientemente, mientras el peor ajuste fue computado para $R_I/R_E = 0,8$ con un error medio de $\pm 10\%$ y $\pm 20\%$ para el 47,8 % y 83,5 % de los test realizados, respectivamente.

Para el Caso 6 (Figura 4) fue computado un error medio de $\pm 10\%$ y $\pm 20\%$ para el 68,7 % y 92,4 % de los datos utilizados, respectivamente. El mejor ajuste fue obtenido para $R_I/R_E = 0,6$ con un error medio de $\pm 10\%$ y $\pm 20\%$ para el 87,2 % y 95,2 % de los test realizados, correspondientemente, mientras el peor ajuste fue encontrado para $R_I/R_E = 0,2$ con un error medio de $\pm 10\%$ y $\pm 20\%$ para el 42,3 % y 78,1 % de los datos evaluados, respectivamente.

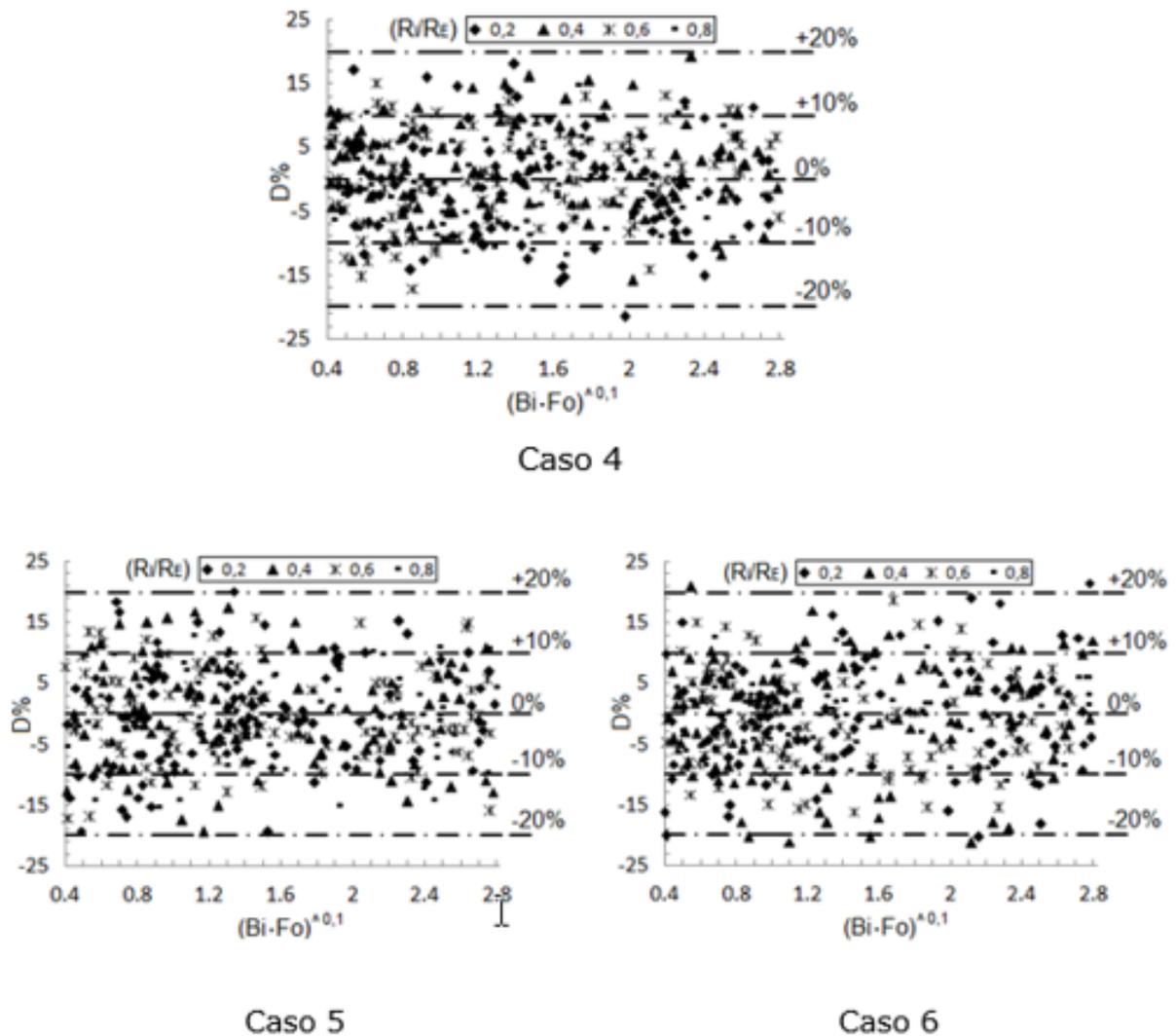


Figura 4. Valores $D_{\%}$ calculados para los casos 4, 5 y 6.

4. CONCLUSIONES

- Se propone un método analítico para determinar el intercambio térmico no estacionario en tuberías. A partir de la comparación con las soluciones analíticas desarrolladas, se verifican los resultados obtenidos mediante el uso del MH.
- En la comparación realizada entre el MH y el método analítico desarrollado se utilizan 2 112 pruebas, detectando que el MH correlaciona con el método analítico con una desviación media de $\pm 10\%$ y $\pm 20\%$ para el 70,4 % y 90,1 %, respectivamente, de las combinaciones R_I/R_E ; Fo ; Bi examinadas.
- El mejor ajuste se encuentra para el Caso 5, con una desviación media de $\pm 10\%$ y $\pm 20\%$ para el 80,3 % y 91,8 % respectivamente, de los datos utilizados, mientras el peor ajuste se detecta en el Caso 2 con

una desviación media de $\pm 10\%$ para el 66,7 % y $\pm 20\%$ para el 87,4 % de los datos utilizados.

- El mejor ajuste individual se calcula en el Caso 1 para $R_I/R_E = 0,4$ con un error medio de $\pm 10\%$ y $\pm 20\%$ para el 92,6 % y 97,2 %, respectivamente, de los datos correlacionados. El peor ajuste individual se computa en el Caso 4 para $R_I/R_E = 0,4$ con un error medio de $\pm 10\%$ para el 41,5 % y $\pm 20\%$ para el 76,2 % de los datos evaluados, respectivamente.

5. REFERENCIAS

- Azis, M. I., Toaha, S., Hamzah, S., & Solekudin, I. (2023). A numerical investigation of 2D transient heat conduction problems in anisotropic FGMs with time-dependent conductivity. *Journal of Computational Science*, 73, 102122.
- Camaraza-Medina, Y., Sánchez-Escalona, A. A., Retirado-Mediaceja, Y., & García-Morales, O. F. (2020). Use of air cooled condenser in biomass power plants: a case study in Cuba. *International Journal of Heat and Technology*, 38(2), 425-431. https://scholar.google.es/scholar?cluster=10853232820124224025&hl=es&as_sdt=0,5#d=gs_cit&t=1730690170843&u=%2Fscholar%3Fq%3Dinfo%3Aht0fLdzBJbYJ%3Ascholar.google.com%2F%26output%3Dcite%26scirp%3D2%26scf%3D1%26hl%3Des
- Can, N., & Keles, I. (2023). A practical jointed approach to transient hyperbolic heat conduction of FGM cylinders and spheres. *Journal of Mechanical Science and Technology*, 37(3), 1223-1231.
- Cetin, B., Kuşcu, Y. F., Çetin, B., Tümüklü, Ö., & Cole, K. D. (2021). Semi-analytical source (SAS) method for 3-D transient heat conduction problems with moving heat source of arbitrary shape. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 165, 120692.
- Chen, Z., Wang, G., Chen, H., & Mao, Z. (2023). Response spatiotemporal correlation and transient temperature field direct reconstruction for heat conduction system. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 216, 124609.
- Gao, Q., & Nie, C. B. (2021). An accurate and efficient Chebyshev expansion method for large-scale transient heat conduction problems. *Computers & Structures*, 249, 106513.
- Gawronska, E., Zych, M., Dyja, R., & Domek, G. (2023). Using artificial intelligence algorithms to reconstruct the heat transfer coefficient during heat conduction modeling. *Scientific Reports*, 13(1), 15343.

- Gün, H., & Feng, W. Z. (2023). BEM for transient nonhomogeneous heat conduction in axisymmetric solids with heat source. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 157, 462-470.
- Hua, Y. C., Zhao, T., & Guo, Z. Y. (2018). Optimization of the one-dimensional transient heat conduction problems using extended entransy analyses. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 116, 166-172.
- Huang, D., Zhao, Y., Ye, K., Wu, F., Zhang, H., & Zhong, W. (2023). The efficient calculation methods for stochastic nonlinear transient heat conduction problems. *Journal of Computational Science*, 67, 101939.
- Ji, X. L., Zhang, H. H., & Han, S. Y. (2023). Transient heat conduction modeling in continuous and discontinuous anisotropic materials with the numerical manifold method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 155, 518-527.
- Jin, G., Xing, H., Zhang, R., Guo, Z. & Liu, J. (2022). Data-driven discovery of governing equations for transient heat transfer analysis. *Computational Geosciences*, 26, 613-631.
- Nicholas, T. E., Pernak, M. J., Scobie, J. A., Lock, G. D. & Tang, H. (2023). Transient heat transfer and temperatures in closed compressor rotors. *Applied Thermal Engineering*, 230, 120759.
- Peng, P. P. & Cheng, Y. M. (2020). Analyzing three-dimensional transient heat conduction problems with the dimension splitting reproducing kernel particle method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 121, 180-191.
- Polyanin, A. D. & Nazaikinskii V. E. (2022). *Handbook of linear partial differential equations for engineers and scientists*. 3rd ed. CRC Press.
- Tan, F., Tong, D., Liang, J., Yi, X., Jiao, Y. Y. & Lv, J. (2022). Two-dimensional numerical manifold method for heat conduction problems. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 137, 119-138.
- Tong, D., Yi, X., Tan, F., Jiao, Y., & Liang, J. (2024). Three-dimensional numerical manifold method for heat conduction problems with a simplex integral on the boundary. *Science China Technological Sciences*, 67(4), 1007-1022.
- Tourn, B. A., Hostos, J. C. Á. & Fachinotti, V. D. (2021). A modified sequential gradient-based method for the inverse estimation of transient heat transfer coefficients in non-linear one-dimensional heat conduction problems. *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 127, 105488.
- Tsega, E. G. (2022). Numerical Solution of Three-Dimensional Transient Heat Conduction Equation in Cylindrical Coordinates. *Journal of Applied Mathematics*, 2022(1), 1993151.

- Wang, C., Gu, Y., Qiu, L. & Wang, F. (2023). Analysis of 3D transient heat conduction in functionally graded materials using a local semi-analytical space-time collocation scheme. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 149, 203-212.
- Wu, Q., Peng, M. J., Fu, Y. D. & Cheng, Y. M. (2021). The dimension splitting interpolating element-free Galerkin method for solving three-dimensional transient heat conduction problems. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 128, 326-341.
- Wu, S., Zhang, Y. & Liu, S. (2021). Transient thermal dissipation efficiency based method for topology optimization of transient heat conduction structures. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 170, 121004.
- Xu, D., Zheng, X., An, D., Zhou, C., Huang, X. & Li, R. (2022). New analytic solutions to 2D transient heat conduction problems with/without heat sources in the symplectic space. *Applied Mathematics and Mechanics*, 43(13), 1233-1248.
- Yang, L., Zhang, J., He, R. & Lin, W. (2021). A dual interpolation precise integration boundary face method to solve two-dimensional transient heat conduction problems. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 122, 75-84.
- Yu, B., Cao, G., Gong, Y., Ren, S. & Dong, C. (2021). IG-DRBEM of three-dimensional transient heat conduction problems. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 128, 298-309.
- Zhang, Z.; Doner, N.; Long, Y. & Lou, C. (2023). Entropy and exergy analysis of coupled radiative heat transfer and heat conduction: A new thermodynamics approach. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 215, 124485.
- Zhang, L., Kong, H. and Zheng, H. (2024). Numerical manifold method for steady-state nonlinear heat conduction using Kirchhoff transformation. *Science China Technological Sciences*, 67(4), 992-1006.
- Zhang, Y., Rabczuk, T., Lu, J., Lin, S. & Lin, J. (2022). Space-time backward substitution method for nonlinear transient heat conduction problems in functionally graded materials. *Computers & Mathematics With Applications*, 124, 98-110.
- Zhang, L. & Zheng, H. (2023). MLS-based numerical manifold method based on IPIM for 3D transient heat conduction of FGMs. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 217, 124704. <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0735193322005504>
- Zhuo, M. (2021). FE2 multi-scale framework for the two-equation model of transient heat conduction in two-phase media. *International Journal of*

Heat and Mass Transfer, 179, 121683.
<https://link.springer.com/article/10.1007/s11431-022-2389-8>

Zhou, L., Lv., J., Cui, M., Peng, H. and Gao, X. (2023). A polygonal element differential method for solving two-dimensional transient nonlinear heat conduction problems. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 146, 448-459. DOI: [10.1016/j.enganabound.2023.07.024](https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2023.07.024)

Información adicional

Conflicto de intereses

Los autores declaran que no existen conflictos de intereses.

Contribución de autores

YCM: búsqueda bibliografía sobre la temática, concepción general y ejecución de la investigación, así como la escritura y revisión del informe final. **YBG:** análisis de los resultados, escritura y revisión del informe final. **YRM:** análisis de los resultados, escritura y revisión del informe final.

ORCID

YCM, <https://orcid.org/0000-0003-2287-7519>

YBG, <https://orcid.org/0000-0001-5420-6627>

YRM, <https://orcid.org/0000-0002-5098-5675>

Recibido: 24/07/2024

Aceptado: 04/09/2024