

Modelación Estadístico-Matemática en Procesos Agrarios. Una aplicación en la Ingeniería Agrícola



Statistical-Mathematical Modeling in Agrarian Processes. An application in Agricultural Engineering

<http://opn.to/a/xisqZ>

Dr.C. Lucía Fernández-Chuairey ¹, MSc. Lazara Rangel-Montes de Oca ¹, Dr.C. Caridad Walkiria Guerra-Bustillo ¹, Dr. MVZ Jany del Pozo-Fernández ¹

¹Universidad Agraria de La Habana, San José de las Lajas, Mayabeque, Cuba.

RESUMEN: En el sector agrario existe una demanda siempre creciente de describir procesos que requieren de la Modelación Estadístico-Matemática, así como de metodologías de trabajo que permitan el desarrollo eficiente de los proyectos de investigación. En tal sentido la Universidad Agraria de La Habana (UNAH) cuenta con grupos multidisciplinares que desarrollan el uso de Modelos Matemáticos, herramientas estadísticas y el empleo del cálculo diferencial en busca de soluciones y producciones óptimas. Por el interés de esta temática y su repercusión en la investigación, se desarrolló la presente revisión para establecer criterios y valoraciones en el análisis y aplicación de modelos que describen Procesos Agrarios, sobre bases matemático - estadísticas. Se incluye una aplicación en estudios de curvas pos cosecha para la pérdida de peso (g) en el cultivo de la Piña, se probaron los Modelos Logístico y Von Bertalaffy y se realiza un análisis comparativo en el que el Modelo Logístico permitió mejor descripción y explicación de la cinética de pérdida de peso e indicadores de la velocidad y momento donde se alcanzó la máxima velocidad de pérdida de peso. Se concluye que el desarrollo de la Modelación Estadístico-Matemática, permite dar respuesta a diversos problemas vigentes de investigación en el sector agrario y a retos docentes y científico-investigativo de la nueva Universidad.

Palabras clave: modelación matemática, procesos agrarios, curvas poscosecha, cultivo de piña.

ABSTRACT: In the agrarian sector, there is an ever-growing demand to describe processes that require Statistical-Mathematical Modeling, as well as work methodologies that allow the efficient development of research projects. In this sense, the Agrarian University of Havana (UNAH) has multidisciplinary groups that develop the use of Mathematical Models, statistical tools and the use of differential calculus in search of optimal solutions and productions. Due to the interest of this topic and its repercussion in the research, the present review was developed to establish criteria and assessments in the analysis and application of models that describe Agrarian Processes, on a mathematical - statistical basis. It includes an application in studies of post-harvest curves for the weight loss (g) in pineapple crop. In addition, the Logistics and VonBertalaffy models were tested and a comparative analysis in which the Logistic Model allowed a better description and explanation of the kinetics of weight loss as well as indicators of the speed and moment, where the maximum speed of weight loss was reached. It is concluded that the development of Statistical-Mathematical Modeling allows responding to several current problems of research in the agricultural sector and to the teaching and scientific-research challenges of the new University.

Keywords: Mathematical modeling, agrarian processes, post-harvest curves, pineapple cultivation.

*Autor para correspondencia: Lucía Fernández-Chuairey, E-mail: lucia@unah.edu.cu

Recibido: 25/07/2018

Aceptado: 25/02/2019

INTRODUCCIÓN

Históricamente el estudio de la dinámica de procesos agrarios ha ido acompañada de expresiones algebraicas, pero por ser sistemas muy complejos por naturaleza, en un inicio no pudieron ser resueltos por los métodos tradicionales del Análisis Matemático. En la práctica estos fenómenos han evolucionado y en muchos casos se representaron a través de Modelos Estadísticos Matemáticos, los que permiten describir procesos, realizar análisis cuantitativos detallados, predecir el comportamiento de los objetos en diversas condiciones y desarrollar técnicas que permiten establecer estrategias de trabajo para lograr soluciones y producciones óptimas.

La Modelación Estadístico-Matemática y sus aplicaciones en las Ciencias Agrarias, ha estado presente por más de 40 años en la Universidad Agraria de La Habana y en investigaciones en colaboración con el Instituto de Ciencia Animal (ICA), el Centro Nacional de Sanidad Agropecuaria (CENSA) y el Instituto Nacional de Ciencia Agrícola (INCA), en los trabajos de los especialistas biométricos y profesionales afines, que abarcan la modelación de procesos agrarios, y biológicos. Lo cual se corrobora en los trabajos de [Menchaca \(1978, 1990\)](#), en estudios de curvas de lactancia en vacas lecheras donde utilizó un modelo multiplicativo con efectos de estas curvas, paralelamente [Guerra \(1980\)](#), empleó la Metodología de Superficie de Respuesta (MSR) en los cultivos de la caña de azúcar, cítricos, pastos y forrajes, para explorar las condiciones óptimas de fertilización.

[Menchaca, \(1990\)](#), usó modelos a los que denominó etápicos, para describir curvas de crecimiento animal y en el trabajo de [Del Pozo y Herrera \(1995\)](#), se divulga el empleo de modelos multiplicativos con control de curvas de crecimiento y efectos ambientales en estudios de crecimiento del pasto estrella (*Cynodon nlemfumsis*).

[Fernández \(1996, 2004\)](#), realiza un estudio asociado a Modelos Matemáticos que describen la dinámica de los procesos biológicos en las Ciencias Agropecuarias, con énfasis en regresiones no lineales y el empleo de métodos iterativos para la estimación de los parámetros y

no mediante la linealización del modelo como tradicionalmente se venía trabajando, donde el propio desarrollo de la informática y de los software estadístico facilitó trabajar las regresiones no lineales por esta vía. Más reciente [Fernández et al. \(2018\)](#), exponen la evolución en regresiones no lineales y la propuesta de parámetros iniciales a partir de interpretaciones matemático-biológicas de los mismos, reportan además ejemplos que van desde los modelos de crecimiento animal y vegetal, el crecimiento alométrico y las curvas de lactancia, entre otros procesos.

De igual forma han sido abordados modelos asociados a evaluaciones y mejoramientos genéticos en bovinos (con el empleo del BLUP (*Best Linear Unbiased Predictor*) y el uso del pesaje en el día de control), así como modelos de crecimiento en pastos (King Grass) para la determinación del momento óptimo de corte abordados por [Rodríguez \(2015\)](#). Se alcanzan otras investigaciones en el área de las Ciencias Agropecuarias reportadas por, [Fernández \(1996a, 1996b, 2004\)](#); [Del Valle \(2000\)](#); [del Valle y Guerra \(2012\)](#); [Vázquez et al. \(2014\)](#); entre otros.

En las Ciencias Técnicas Agropecuarias la Modelación Matemática ha sido aplicada a la predicción de propiedades de calidad de los frutos [Rangel \(2015\)](#), donde para la caracterización de estos procesos intervienen modelos lineales y no lineales, cuya fundamentación teórica de los modelos más utilizados serán abordados en el presente trabajo. Por el interés de esta temática y su repercusión en la investigación se desarrolló el mismo, para establecer criterios y valoraciones en el análisis y aplicación de modelos que describen Procesos Agrarios, sobre bases matemático- estadísticos.

MÉTODOS

Fundamentos teóricos

Modelos lineales

El caso más conocido de Modelos Matemáticos, lo constituye el modelo lineal siendo expresado de forma general como:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \dots + \beta_i x_{pi} + e_i$$

donde:

Y_i - Variable dependiente o respuesta.

β_j - Parámetros del modelo ($j = 0, 1, 2, \dots, p$)

x_{ji} - Valor i-esimo de la variable independiente ($j=1,2,3,\dots,p$).

e_i - error aleatorio independiente, con distribución normal con media cero y varianza (σ^2).

El concepto de linealidad y no linealidad está referida a los parámetros, en este caso se considera (x) como una constante y la dependencia de (Y) con los parámetros es una combinación de sumas y restas. [Menchaca \(1990\)](#), al referirse a **modelos lineales** señala que presentan limitaciones desde el punto de vista práctico y biológico, pero son sumamente útiles si el objetivo corresponde más al campo de la estimación que a la interpretación biológica. Además estos son muy utilizados por lo simple del método matemáticos que utiliza para estimar sus parámetros (método de los mínimos cuadrados ordinarios), el cual es exacto y la solución es única.

El modelo general puede ser llevado a formas específicas siendo alguna de ellos el polinomial de primer orden, polinomial de segundo orden, etc. De los modelos lineales que han mostrado buen nivel de ajuste en aplicaciones dentro de las ciencias técnicas agropecuarias se tiene el polinomial cúbico y polinomial logarítmico, cuyas características fundamentales y forma funcional se muestran en la [Tabla 1](#).

Modelos no lineales

Aunque los modelos lineales son adecuados para muchas situaciones, algunas variables no se conectan entre sí por una relación tan simple, como por ejemplo la representación algebraica de la dinámica de crecimiento de individuos en especies de animales o la cinética de pérdida de peso en postcosecha, lo que han llevado a la

búsqueda y construcción de modelos matemáticos los cuales han resultado ser de características **no lineales** en muchos casos.

La desventaja de estos modelos es que para el cálculo de sus parámetros se utilizan métodos iterativos y esto lleva cálculos muy complejos e incluso se puede caer en errores al estimar los parámetros, muchos autores utilizan transformaciones para linealizar el modelo y aplicar el método de los mínimos cuadrados, pero en la práctica este procedimiento no es aconsejable, en la actualidad existen programas específicos para el ajuste no lineal el cual permite superar esta desventaja.

Dentro de los modelos no lineales se utilizan con frecuencia aquellos que son asintóticos sin puntos de inflexión en los que se encuentran los modelos de Brody, Exponencial Modificada y los asintóticos con puntos de inflexión dentro de estos modelos están: Gompertz, Von-Bertalanffy, Logístico, entre otros. En la [Tabla 2](#) se muestran las expresiones algebraicas de algunos de estos modelos, así como indicadores asociadas al cálculo de velocidad y/o a tasa de ganancia (primera derivada), punto de inflexión.

En el modelo de Brody la función es cóncava y crece hasta estabilizar su valor a medida que aumente el valor de t, sin embargo las velocidades o tasas ($f'(x)$) disminuyen a medida que aumenta el valor de t. ([Figura 1](#))

El resto de los modelos su forma es sigmoide. La diferencia entre ellos es la localización del punto de inflexión Las velocidades o tasas en estos modelos es en forma acampanada esta aumenta hasta alcanzar su máximo valor, después decrece hasta hacerse cero ([Figura 1](#))

TABLA 1. Resumen de aspectos útiles de modelos lineales

Modelo	Forma funcional	Primera derivada	Punto de inflexión
1	$Y_i = \beta_0 + \beta_1x_i + \beta_2x_i^2 + \beta_3x_i^3 + e_i$	$Y_i' = \beta_1 + 2\beta_2x_i + 3\beta_3x_i^2$	$x = -\frac{\beta_2}{3\beta_3} \pm \sqrt{\frac{\beta_2^2}{9\beta_3^2} - \frac{\beta_0}{\beta_3}}$
2	$y = \beta_0 + \beta_1x + \beta_2x^2 + \beta_3\ln(x) + e_i$	$y' = \beta_1 + 2\beta_2x + \frac{\beta_3}{x}$	$x = \sqrt{\frac{\beta_3}{2\beta_2}} \pm \sqrt{\frac{\beta_3}{2\beta_2} - \frac{\beta_0}{\beta_2}}$

1- polinomial cúbico 2-polinomial logarítmico

Yi- Variable dependiente.

β_j - Parámetros del modelo ($j=0,1,2,\dots,p$)

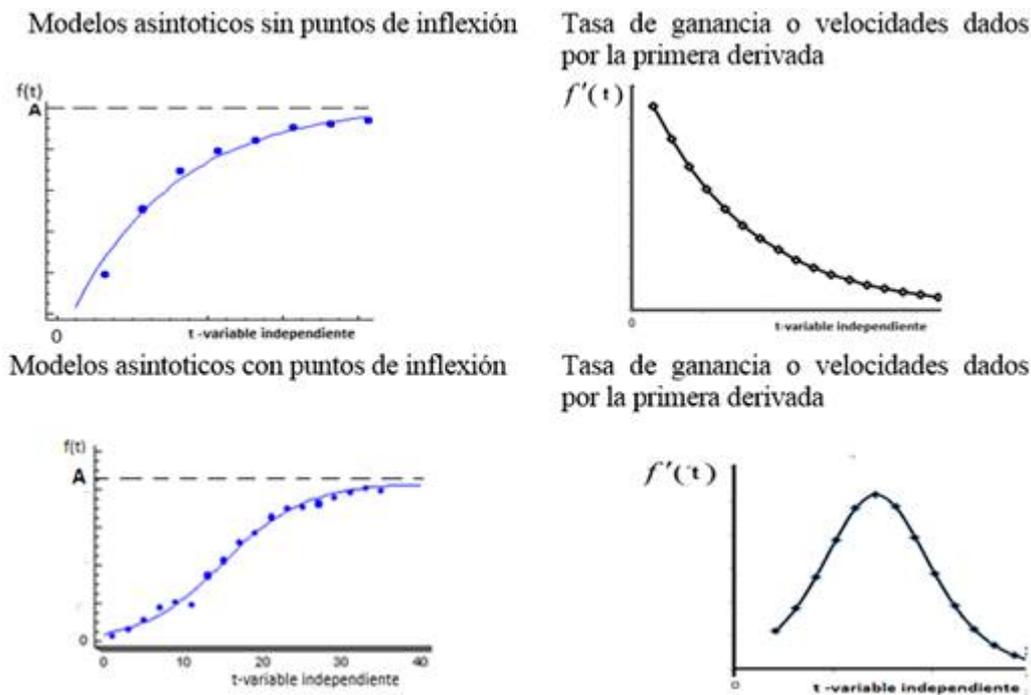
x_i - Valor i-esimo de la variable independiente.

e_i - error aleatorio independiente, con distribución normal con media cero y varianza (σ^2).

TABLA 2. Forma funcional y aspectos relacionados con modelos no lineales

	Modelo de Brody	Modelo Logístico	Modelo Von Bertalanffy
Forma funcional	$f(t) = A(1 - be^{-kt})$	$f(t) = \frac{A}{(1 + be^{-kt})}$	$f(t) = A(1 - be^{-kt})^3$
Descripción	Modelo asintótico sin punto de inflexión	Modelo asintótico con punto de inflexión	Modelo asintótico con punto de inflexión
Asíntota	A	A	A
Tasa de ganancia o velocidad (primera derivada)	$f'(t) = Abke^{-kt}$	$f'(t) = \frac{Abke^{-kt}}{(1 + be^{-kt})^2}$	$f'(t) = 3A(1 - be^{-kt})^2 bke^{-kt}$
Segunda derivada Características	$f''(t) = -Ak^2be^{-kt}$	$f''(t) = \frac{Abk^2e^{-kt}(be^{-kt} - 1)}{(1 + be^{-kt})^3}$	$f''(t) = 3Abke^{-kt}(1 - be^{-kt})^2 + 2(3Abe^{-kt}(1 - be^{-kt})(bke^{-kt}))$
Punto de inflexión	No tiene	$t = \frac{\ln b}{k}$	$t = \frac{\ln 3b}{k}$

f(t): Variable aleatoria dependiente, t :Variable independiente, controlada o predefinida, A,b,k: parámetros a estimar



f(t): Variable aleatoria dependiente, t :Variable independiente, controlada o predefinida, A-,asíntota

FIGURA 1. Representación de Modelos no lineales y sus correspondientes tasas o velocidades.

Ejemplo de aplicación de estos modelos en estudios de curvas pos cosecha de la Piña (variedad Cayena Lisa)

El estudio se llevó a cabo en áreas de la empresa de cultivos varios ubicada dentro de la Llanura Habana-Matanzas, con un rango de la temperatura media anual entre los 25 y los 32 °C y elevada humedad ambiental. La Pérdida de Peso (PP) se realizó a través del pesaje de los frutos con la utilización de la balanza electrónica, durante los primeros nueve días de cosechado, se

calcularon valores promedios (g) en los días observados. Se probaron los modelos Logísticos y de Von Vertalanffy (descritos anteriormente), para la bondad de ajuste y discriminación entre modelos se tuvo en cuenta el coeficiente de determinación, suma de cuadrado del error, significación del modelo y de los parámetros, distribución de los residuos y docima de Durbin Watson. Se describe el proceso de perdida a partir del mejor modelo, se estima la velocidad con que se produce la pérdida de peso en cada instante del

período analizado a partir de la derivada de la función y para la búsqueda del momento donde se produjo la máxima velocidad de pérdida de peso se calculó mediante el punto de Inflexión.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Los valores promedios de pérdida de peso (g) y los días correspondientes, permitieron estimar los parámetros de las curvas ajustadas (tabla 3), las que mostraron buen ajuste con coeficiente de determinación por encima del 97%. Lo que indican que ambos modelos son una alternativa para la descripción del proceso y para la predicción dentro del rango de valores estudiados.

La discriminación entre los modelos, seleccionó al Modelo Logístico como el mejor, el que logra explicar el 99.27 % de la variabilidad total, y donde todos sus parámetros son significativo y logró menores: error estándar de estimación, media absoluta del error y suma de cuadrado del error que el modelo de Von-Bertalaffy (Tabla 3).

El modelo Logístico seleccionado (Figura 2a) muestra, el aumento de la pérdida de peso a medida que se incrementan los días postcosecha, con un comportamiento brusco los primeros días y una tendencia a estabilizar este valor a partir del séptimo día. Esta tendencia descrita por el modelo se considera adecuada y están asociadas entre otros aspectos a los cambios fisiológicos irreversibles que se suceden en la fruta.

Otro indicador de interés se asocia al comportamiento de la velocidad con que se produce esta pérdida de peso (Figura 2b), que es en forma acampanada esta aumenta hasta alcanzar su máximo valor aproximadamente en el cuarto día y después decrece hasta hacerse cero.

En la Tabla 4 se observa el punto de inflexión (3,8, 2,24) que es donde se alcanza la máxima velocidad de pérdida de peso, siendo este de 1,07 g, se muestra además los valores alcanzados alrededor de este punto.

Estos indicadores asociados a la pérdida de peso, cobran un especial interés para economizar recursos, tiempo y esfuerzos, lo que permite

TABLA 3. Resultado del ajuste de los modelos

	Modelo Logístico	Modelo Von-Bertalaffy
Coefficiente de Determinación (R ²) %	99,27%	97,64%
Significación del modelo	significativo	significativo
Modelo ajustado (parámetros estimados)	$f(t) = \frac{4,57}{(1 + 36,25e^{-0,93t})}$	$f(t) = 4,98(1 - 1,12e^{-0,43t})^3$
Significación de los parámetros	Todo significativos	Todo significativos
Error estándar de estimación	0,20	0,36
Suma de cuadrado del error	0,16	0,52
Durbin Watson	2,38	2,19

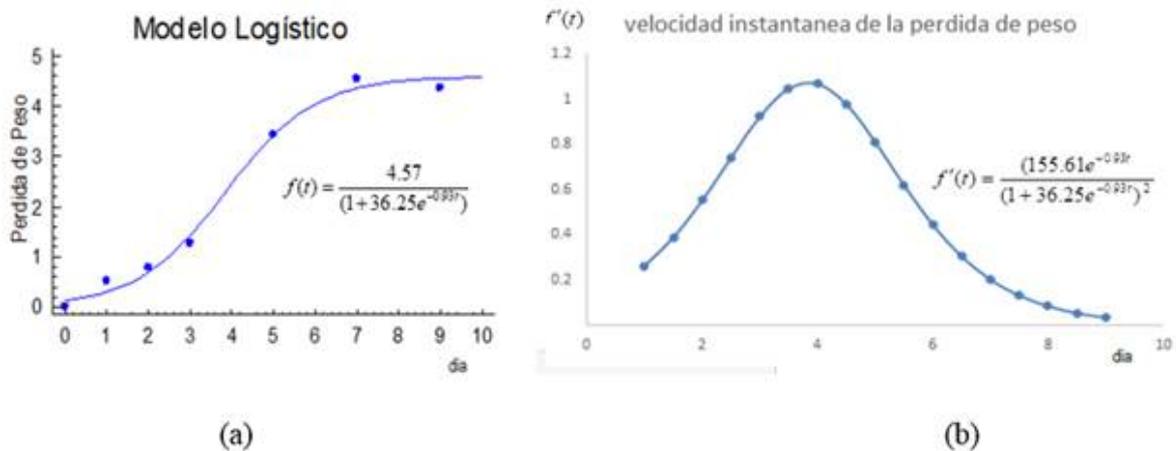


FIGURA 2. Modelo de mejor ajuste para la pérdida de peso (2a) y velocidad con que se produce la misma 2(b).

TABLA 4. Comportamiento de la pérdida de peso y la velocidad con que se produce la pérdida de peso alrededor del punto de inflexión

Día	3,5	3,6	3,7	3,8	3,9	4	4,1	4,2
Pérdida de Peso (g)	1,927	2,032	2,138	2,245	2,352	2,459	2,565	2,669
Velocidad de PP(g)	1,046	1,060	1,068	1,073	1,072	1,067	1,058	1,044

trazar estrategias de manejo postcosecha y garantizar la calidad del producto.

En la actualidad se cuenta con valiosos resultados relativos al empleo de estos y otros tipos de modelos que han sido utilizado para la predicción de la producción de biomasa verde y seca del pasto (*Maralfalfa*) con varias dosis de fertilizante nitrogenado; o en la descripción y caracterización de las propiedades físicas y químicas de la piña (*variedad cayena Lisa*) almacenada a temperatura ambiente, así como en la modelación y simulación del rendimiento del pasto estrella (*C. nlemfuensis*) bajo diferentes condiciones de manejo y escenarios climáticos, como muestran los trabajos de [Fernández et al. \(2011\)](#); [Rangel \(2015\)](#); [López \(2016\)](#), entre otros autores.

CONCLUSIONES

- Para abordar de forma detallada el análisis de procesos agrarios se requiere entre otros aspectos del conocimiento de un grupo de modelos con la aplicación del Cálculo Diferencial y la Estadística Matemática.
- La gráfica de diferentes modelos, así como sus tasas absoluta contribuye a esclarecer los análisis sobre la dinámica de diferentes fenómenos agrarios.
- La modelación matemática permite profundizar en las leyes que rigen cada uno de los fenómenos y facilita el estudio del proceso y crea base metodológica para el procesamiento de la información
- El desarrollo de la Modelación Estadístico - Matemático, permite dar respuesta a problemas vigentes de investigación en el sector agrario y a los retos docentes y científico-investigativo de la nueva Universidad.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

DEL POZO, P.P.; HERRERA, R.S.: “Modelado del crecimiento del pasto estrella (*Cynodon*

nlemfuensis). 1. Modelo multiplicativo con control de la curva de crecimiento y los efectos ambientales”, *Pastos y Forrajes*, 18(2): 171, 1995, ISSN: 0864-0394.

DEL VALLE, J.: *La Multicolinealidad en Modelos de Regresión Lineal Múltiple. Propuesta de solución*, Universidad Agraria de La Habana (UNAH), PhD Thesis, San José de las Lajas, La Habana, Cuba, 2000.

DEL VALLE, M.J.; GUERRA, B.W.: “La multicolinealidad en modelos de regresión lineal múltiple”, *Revista Ciencias Técnicas Agropecuarias*, 21(4): 80-83, 2012, ISSN: 1010-2760, E-ISSN: 2071-0054.

FERNÁNDEZ, C.L.; GUERRA, B.C.W.; DE CALZADILLA, P.J.; CHANG, L.N.U.: “Desarrollo de la modelación estadístico-matemática en las ciencias agrarias. Retos y perspectivas”, *Investigación Operacional*, 38(5): 462-467, 2018.

FERNÁNDEZ, L.: *Modelos que describen la dinámica de los procesos biológicos en las ciencias*, Universidad Agraria de La Habana, Cuba, MSc. Thesis, San José de las Lajas, La Habana, Cuba, 60 p., 1996a.

FERNÁNDEZ, L.: “Modelos que describen la dinámica de los procesos biológicos en las Ciencias Agropecuarias”, *La Habana, Cuba: Universidad Agraria de la Habana*, 1996b.

FERNÁNDEZ, L.: *Modelos estadísticos-matemáticos en el análisis de la curva de lactancia y factores que la afectan en el genotipo Siboney de Cuba*, Universidad Agraria de La Habana, Instituto de Ciencia Animal, Veterinary Doctor Thesis., San José de las Lajas, La Habana, Cuba, 100 p., 2004.

FERNÁNDEZ, L.; TONHATI, H.; ALBUQUERQUE, L.G.; ASPILCUETA-BORQUIS, R.R.; MENÉNDEZ BUXADERA, A.: “Modelos de regresiones aleatorias para la estimación de parámetros genéticos y estudios de curvas de lactancia del

- Holstein en Cuba”, *Revista Cubana de Ciencia Agrícola*, 45(1), 2011, ISSN: 0034-7485.
- GUERRA, B.C.W.: *Relación Modelo-Diseño de tratamientos en la determinación de las dosis óptimas de fertilizantes con experimentos de Campo en Cuba*, Instituto de Suelos y Agroquímica “Nikola Pushkarov”, PhD. Thesis, Sofia, Bulgaria, 184 p., 1980.
- LÓPEZ, J.L.: *Modelación y simulación del rendimiento del pasto estrella (C. nlemfuensis) bajo diferentes condiciones de manejo y escenarios climáticos*, Universidad Agraria de La Habana, Cuba, MSc. Thesis, San José de las Lajas, Mayabeque, Cuba, 79 p., 2016.
- MENCHACA, M.A.: *Modelo multiplicativo. Efecto de curva de lactancia controlado para el análisis estadístico de experimentos con vacas lecheras*, Instituto Superior de Ciencias Agropecuarias-Instituto de Ciencia Animal, PhD Thesis, San José de las Lajas, La Habana, Cuba, 1978.
- MENCHACA, M.A.: “El uso de modelos etápicos para describir las curvas de crecimiento animal”, *Revista Cubana Ciencias Agrícolas*, 24(1): 29-34, 1990, ISSN: 0034-7485.
- RANGEL, M.L.: *Variabilidad temporal de las propiedades físicas, químicas y mecánicas de la piña, variedad Cayena Lisa, almacenada a temperatura ambiente*, Universidad Agraria de La Habana, Cuba, MSc. Thesis, San José de las Lajas, Mayabeque, Cuba, 99 p., 2015.
- RODRÍGUEZ, L.: *Modelación y simulación de la producción de biomasa de Pennisetum purpureum Schum vs. King Grass y su aplicación en la alimentación animal*, Universidad Agraria de La Habana, PhD Thesis, San José de las Lajas, Mayabeque, Cuba, 2015.
- VÁZQUEZ, A.Y.; GUERRA, B.C.W.; SÁNCHEZ, L.O.E.: “Modelación estadístico-computacional para el estudio de la sostenibilidad socioeconómica de la empresa pecuaria Valle del Perú”, *Investigación Operacional*, 35(2): 121-130, 2014.

Lucía Fernández-Chuairéy, Profesor Titular, Universidad Agraria de La Habana (UNAH), Departamento de Matemática y Física, e-mail: lucia@unah.edu.cu

Lazara Rangel-Montes de Oca, Profesor Asistente, (UNAH), Departamento de Ingeniería Agrícola, e-mail: lazarar@unah.edu.cu

Caridad Walkiria Guerra-Bustillo, Profesor Titular, (UNAH), Departamento de Matemática y Física, e-mail: luzmi@infomed.sld.cu

Jany del Pozo-Fernández, Adiestrada, Facultad de Medicina Veterinaria, e-mail: janydelpozo@gmail.com

Los autores de este trabajo declaran no presentar conflicto de intereses.

Este artículo se encuentra bajo licencia [Creative Commons Reconocimiento-NoComercial 4.0 Internacional \(CC BY-NC 4.0\)](https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/)

La mención de marcas comerciales de equipos, instrumentos o materiales específicos obedece a propósitos de identificación, no existiendo ningún compromiso promocional con relación a los mismos, ni por los autores ni por el editor.