

## La economía de las redes cerradas de abasto (3ª parte)

José Bienvenido Martínez Rodríguez  
Prof. Dr., Centro de Investigaciones Hidráulicas (CIH), CUJAE  
e-mail: bienvenido@cih.cujae.edu.cu

### RESUMEN

Como el problema clásico de optimización de la red mallada es matemáticamente no-convexo y multimodal, la solución habitual es incierta al ignorar cuán cerca se está de la “mejor” solución. Frecuentemente se busca esta solución “mejor” o “global” sin tener claro su significado. Esta tercera parte discute el alcance de la solución “global” y el papel que puede representar la distribución del flujo en las tuberías para enfrentar la no-convexidad y la multimodalidad en un nuevo contexto. Ese contexto se expuso en la primera parte, al formular una función objetivo capaz de demostrar que una red mallada puede competir con una red ramificada. En consecuencia, se argumenta ahora la conveniencia de trabajar con flujos y cargas piezométricas como variables y se enumeran sus ventajas en el marco de los nuevos conceptos. Dada su vinculación con lo expuesto, se estudia el tema de la máxima entropía de manera crítica y se incluye un ejemplo para su comparación con el enfoque propuesto.

**Palabras clave:** distribución de flujo, red mallada, diseño de redes, optimización, abasto de agua.

## The economy of water supply looped networks (3<sup>rd</sup> part)

### ABSTRACT

As the classical water-supply looped-network optimization problem is mathematically non-convex and multimodal, the resulting solution of most approaches is uncertain in the sense of how close it is to the “best” solution. In many cases, this “best” or “global” solution is invoked and pursued without a clear understanding of its meaning. This paper discusses what is involved in “global” solutions and the role that pipe flow distribution can play to deal with non-convexity and multimodality in a new context. The author has introduced this new context recently after formulating a new objective function capable of finding that a looped network can be economically more attractive than its related branched one. Therefore, the convenience of an approach dealing with flows and heads, as relevant decision variables, is encouraged in this paper and its advantages enumerated under the new concepts. The entropy approach is studied critically and an example is provided for comparison with the proposed approach.

**Keywords:** flow distribution, looped networks, network design, optimization, water supply.

## INTRODUCCIÓN

La mayoría de los múltiples enfoques presentados para la optimización de redes malladas de abasto de agua emplean, como variables de decisión, los flujos y cargas piezométricas (o pérdidas por fricción) o bien los diámetros de las tuberías. En cuanto a técnicas matemáticas pueden encontrarse la programación lineal (PL), la no-lineal (PNL), así como los algoritmos evolutivos y de programación entera. En muchos casos, el proceso de optimización se plantea con dos o más etapas. Esta diversidad es una consecuencia de la complejidad del problema.

La incertidumbre es una gran desventaja inherente al campo del diseño óptimo de redes malladas de abasto de agua. Esta incertidumbre está presente cuando se estiman la demanda actual y la futura, la variación diurna de la demanda, los coeficientes de fricción, la confiabilidad de la red y del sistema, etc. A esta aseveración se añade la incertidumbre que surge de los resultados del proceso mismo de optimización. Como el problema clásico de optimización de la red mallada es matemáticamente no-convexo y multimodal, a pesar de la existencia de numerosos enfoques para manejarlo, ni uno solo puede reclamar haber alcanzado el óptimo global en el caso general. En consecuencia, la solución final es incierta porque no se sabe cuán lejos está del verdadero óptimo global (Martínez 2011).

Esta incertidumbre es típica (aunque no exclusiva) de algunos enfoques cuyas soluciones dependen de una solución inicial supuesta (Morgan y Goulter 1985; Park y Liebman 1993; Gupta y Bhave 1996; Xu y Goulter 1997a). Todavía más, en la formulación clásica (minimizar un objetivo de costo capital bajo restricciones de nodos y circuitos) el alcanzar el verdadero óptimo global sería inútil en la práctica, ya que solo conduce a redes ramificadas puras. La discusión sobre el significado del óptimo global continúa en lo adelante.

Aparte de esta incertidumbre asociada a la optimización, algunos procedimientos producen diámetros continuos (Varma et al. 1997; Tanyimboh y Templeman 2000) o soluciones de dos diámetros por tramo (Loganathan et al. 1995), con lo que se alejan aún más de la aplicación práctica de ingeniería. Se han presentado algunos procedimientos que trabajan directamente con diámetros discretos. Un grupo de estas técnicas aplica algoritmos evolutivos (Savic y Walters 1997; Cunha y Ribeiro 2004), las cuales, a pesar de su capacidad de evaluar decenas o cientos de miles de soluciones no se ven libres de las desventajas ya mencionadas.

De hecho estas técnicas se ven limitadas por la carga computacional para el caso de redes grandes. Recientemente ha salido a la luz un algoritmo de programación lineal entera, que maneja diámetros discretos (Samani y Mottaghi 2006). Aunque el ejemplo que se ofrece resulta en una red quasi-ramificada (pseudo-mallada), esta técnica pudiera ser prometedora si demuestra ser consistente y robusta. En otros casos se ha añadido una restricción de confiabilidad (Xu y Goulter 1999; Afshar et al. 2005) pero, como ya se dijo en la segunda parte, la mayoría de las definiciones existentes de confiabilidad no son capaces por sí solas de asegurar la redundancia necesaria, (Martínez et al. 2011).

Pueden mencionarse también las técnicas de multiobjetivo de reciente desarrollo (Devi Prasad y Park 2004; Farmani et al. 2005) que también parecen limitadas en cuanto al tamaño del problema así como la necesidad de investigar más en relación con el tipo de parámetro de confiabilidad y mejorar la comparabilidad de sus soluciones con otras técnicas.

Luego de esta discusión no parecería difícil demostrar lo conveniente y ventajoso que sería poder desarrollar un procedimiento que tuviera las siguientes características:

- ser capaz de producir una red mallada con la redundancia adecuada.
- la solución que se obtiene es única y reproducible.
- la solución constituye un óptimo global bajo ciertas condiciones.
- puede aplicarse a redes grandes reales.

El propósito de esta tercera parte es proponer un procedimiento de este tipo.

## FUNCIÓN OBJETIVO CLÁSICA

Aunque las variables básicas de decisión son los diámetros, quizás por la alta no-linealidad asociada a ellos, algunos investigadores formulan el problema en términos de conjuntos separados de flujos y cargas piezométricas (Alperovitz y Shamir 1977; Chiong 1985; Sarbu y Kalmar 2002; Martínez 2007,2010).

Siguiendo esta idea, la función objetivo (FOB) de Chiong (1985) citada por Martínez (2007) y expuesta en la primera parte de este trabajo quedó formulada allí de esa manera en las ecuaciones (5) y (6) (ver primera parte).

Para dibujar un gráfico de esa FOB, se sustituyen las ecuaciones (3) en la ecuación (5), todas de la primera parte. Luego se consideran las  $hf_k$  como conocidas y, finalmente, se supone que las cargas en los nodos fuente son dato, de modo que el término de energía en la ecuación (5) de la primera parte es constante. De ahí sale una nueva ecuación que puede escribirse para una red simple de un circuito como la de la Figura 1 en la forma:

$$\psi' = K_1 Q_1^{mn/r} + K_2 (Q_1 - q_C)^{mn/r} + K_3 (q_A - Q_1)^{mn/r} + K_4 (q_B + q_C - Q_1)^{mn/r} \quad (1)$$

Donde  $\psi'$  equivale a la anterior  $\psi$  al retirar el término constante de energía. Los valores  $K$  son constantes. Todos los valores  $Q_k$  han quedado expresados en función de  $Q_1$  a través de las ecuaciones (3) de la primera parte.

Suponiendo valores prácticos razonables para los parámetros ( $K_1=K_2=K_3=K_4=3790$ ;  $m=1.5$ ;  $n=2$ ;  $r=5$ ;  $q_A = q_B + q_C + q_D$ ;  $q_B=80$ ;  $q_C=60$ ;  $q_D=60$  L/s) se hace un gráfico de la ecuación (1) como caso (a) con la línea gruesa de la Figura 1. Este gráfico se presenta con la abscisa en escala adimensional ( $fQ_1 = Q_1/q_A$ ) y la escala de ordenadas es de \$/año pero su valor numérico es irrelevante.

De mayor interés aquí es la forma de la curva y las siguientes características del gráfico: (a) la curva tiene tres máximos como puntos estacionarios; (b) hay también cuatro mínimos no estacionarios ubicados precisamente donde cada uno de los cuatro flujos en las tuberías se hace cero:  $Q_1=0$  para  $fQ_1=0$ ;  $Q_2=0$  para  $fQ_1=0.3$ ;  $Q_4=0$  para  $fQ_1=0.7$ ;  $Q_3=0$  para  $fQ_1=1.0$ .

Luego la concavidad y la multimodalidad quedan claramente expuestas. Es también evidente de la Figura 1 que en todos los mínimos hay una discontinuidad en la derivada. Esto puede verificarse calculando la derivada de la ecuación (1) respecto a  $Q_1$  y notando que va al infinito en esos puntos.

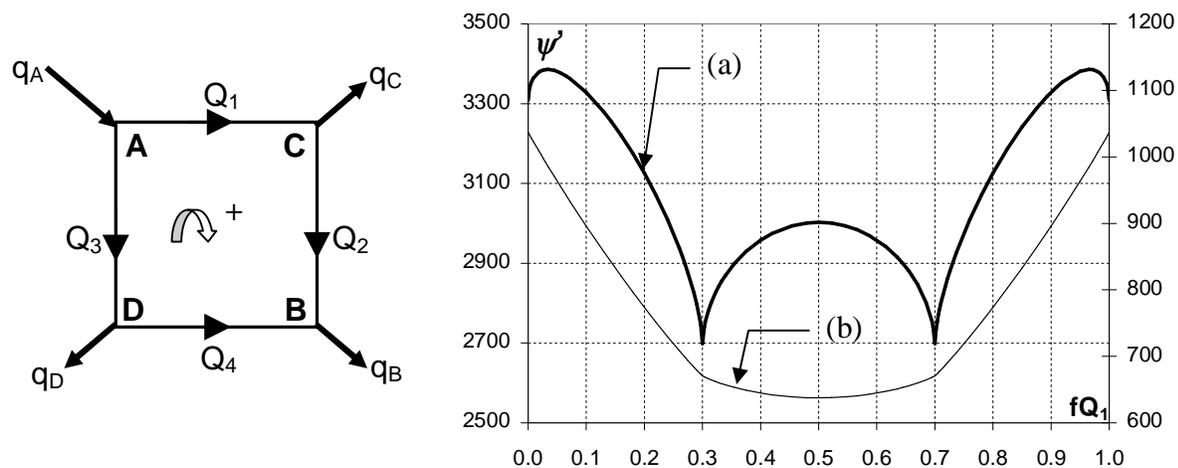


FIGURA 1. Gráfico de ecuación (1) para red simple en casos (a) y (b)

Se ha demostrado (Chiong 1985) que esta función se tornaría *convexa* y *unimodal* para  $mn/r > 1$ , lo cual solo puede ocurrir para  $m > 2.5$ , pero este valor de  $m$  negaría la economía de escala existente en los costos de tuberías y por eso es que la convexidad no es factible con los valores que toman los exponentes en la práctica real.

¿Dónde están, en la Figura 1, los óptimos globales? En este caso hay cuatro mínimos locales y, debido a la simetría de esta sencilla red, hay dos mínimos globales. Ni siquiera es único el óptimo global. Si en la optimización se especificaran restricciones de diámetro mínimo o flujo mínimo, la búsqueda del mínimo costo en el ejemplo de la Figura 1 daría cuatro posibles soluciones. Generalizando este razonamiento a redes mayores se concluye que el óptimo global con esas restricciones puede ser multimodal.

Aunque es cierto que la Figura 1 se ha trazado para  $hf_k$  constantes en aras de la simplicidad, el que suscribe sostiene que este análisis ofrece una clara visión de las relaciones implícitas. Como extensión, es posible obtener conclusiones similares a partir de otros dibujos de costo-flujo para dos circuitos, como los que aparecen en Loganathan et al. (1995) y (mejor) en Kessler y Shamir (1989). Mediante la variación de parámetros el gráfico de  $\psi'$  puede adoptar diferentes formas, por ejemplo, si se introduce un valor muy grande en la longitud de una de las tuberías, el gráfico mostrará claramente un solo mínimo global que significa la eliminación de esa tubería.

Otro efecto de interés surge en el hipotético caso de  $m > 2.5$ . El caso (b) con curva de línea fina en la Figura 1 es un gráfico de  $\psi'$  para  $m = 3$  (escala a la derecha). Ahora se observa un solo mínimo global en  $fQ_1 = 0.5$  a causa de la simetría, y la derivada sigue discontinua en  $fQ_1 = 0.3$  y  $fQ_1 = 0.7$ . Puede demostrarse que cambiando parámetros (como el aumento de la longitud de una tubería) para eliminar la simetría, el mínimo podría ubicarse cerca de uno de los dos valores donde el flujo es cero. Esto tiene una muy instructiva conclusión: aún cuando no hubiera economía de escala y el problema clásico de la red mallada tuviera un único mínimo global absoluto, la búsqueda de este óptimo global no tendría mucho sentido ya que la “maldición” del

resultado ramificado todavía estaría presente. ¿Por qué ocurre esto? Esto ocurre porque la matemática responde estrictamente a lo que está escrito en la FOB y las restricciones. La razón principal para hacer mallada una red, que se ha discutido en la segunda parte de este trabajo, no ha sido expresada matemáticamente.

### NUEVA FUNCIÓN OBJETIVO

Una nueva FOB ha sido propuesta en la primera parte de este trabajo. Como se recordará, la nueva FOB se obtiene introduciendo un costo anual esperado en relación con los fallos de tuberías, ver ecuación (9) de la primera parte. Sustituyendo las ecuaciones (4) de la primera parte en la mencionada ecuación (9) se obtiene:

$$\psi = c_i \eta \sum_{k=1}^{NP} \mu_k \frac{Q_k^{mn/r}}{hf_k^{m/r}} + \sum_{k=1}^{NP} \beta_k \frac{Q_k^{-un/r}}{hf_k^{-u/r}} + C \sum_{s=1}^{NS} q_s (pm_s + exp(x_s) + z_s) \quad (2)$$

donde: 
$$\beta_k = \omega_k L_k (\lambda_k L_k)^{-u/r} \quad (3)$$

Si ahora se sustituyen las ecuaciones (3) de la primera parte y se hacen suposiciones similares a las que se hicieron para obtener la ecuación (1) anterior se obtiene:

$$\psi'' = \psi' + B_1 Q_1^{-un/r} + B_2 (Q_1 - q_C)^{-un/r} + B_3 (q_A - Q_1)^{-un/r} + B_4 (q_B + q_C - Q_1)^{-un/r} \quad (4)$$

donde  $\psi'$  representa la misma ecuación (1) anterior y los valores  $B$  son constantes. Con el objetivo de dibujar la ecuación (4), se suponen valores habituales para otro grupo de parámetros ( $10^5 a = 3.50$ ;  $u = 1.27$ ;  $t_f = 2.0$  día;  $c_f = 500$  \$/día;  $c_a = 2.0$  \$/m<sup>3</sup>). La línea gruesa, caso (a), en la Figura 2 representa a  $\psi''$  mientras que la línea fina, caso (b), es la suma de los términos a la derecha de  $\psi'$ , o sea, es  $(\psi'' - \psi')$ . Este último valor  $(\psi'' - \psi')$  simboliza el nuevo término que dio lugar a la nueva FOB mencionada. Denótese el mismo ahora como  $New = (\psi'' - \psi')$ .

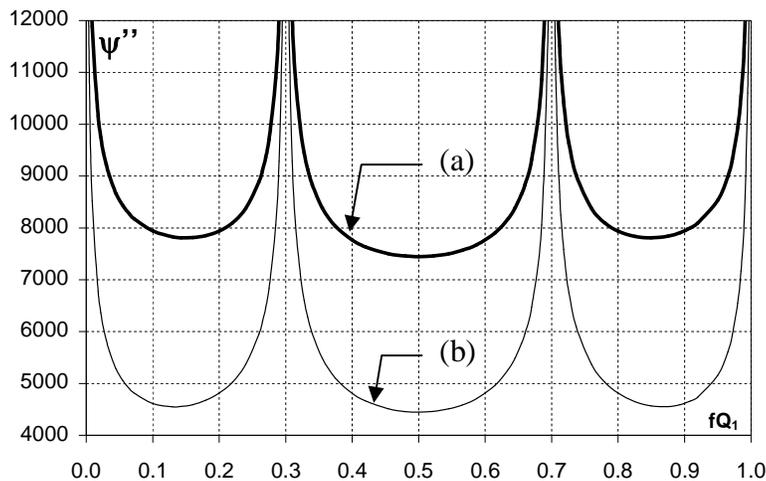


FIGURA 2. Gráfico de ecuación (4) en casos (a) y (b)

Puede verse que la forma del nuevo término *New*, caso (b), es convexa aunque multimodal. La función va hacia el infinito dondequiera que el flujo se hace cero. El dibujo completo de  $\psi''$  de la ecuación (4), caso (a), es muy similar al anterior. Esto significa que, con los valores seleccionados de los parámetros, la adición de  $\psi'$  a *New*, a pesar de su naturaleza cóncava, no puede revertir la convexidad del nuevo término *New*. Pero si se cambian los parámetros de modo que aumente el peso relativo de  $\psi'$ , pudiera llegarse a una situación en que los mínimos se localicen cerca de los puntos de flujo cero y aparezca la concavidad en la forma de la curva de  $\psi''$ . Esta situación se ilustra en la Figura 3. Este gráfico se obtuvo multiplicando el coeficiente de costo de las tuberías por un factor de 10. Idéntico gráfico se obtiene si se dividen los dos índices del costo de fallo de tuberías y la escala vertical entre 10.

El efecto de aumentar la longitud de una tubería tiende aquí también a favorecer a uno de los mínimos con similares implicaciones de reducir notablemente el flujo de dicha tubería. Este efecto y el mostrado en la Figura 3 son mucho menos acusados con la nueva FOB – nótese que ahora es imposible alcanzar un valor cero de flujo y estas desviaciones deben ocurrir solamente cuando los parámetros toman valores muy alejados de los usuales – pero en cualquier caso pudieran presentarse en una red grande real dada la diversidad espacial de sus longitudes y demandas.

Entonces la nueva FOB, a pesar de ser una clara vindicación económica de la red mallada, no está exenta de ciertas desventajas cuando se intenta buscar el óptimo global.

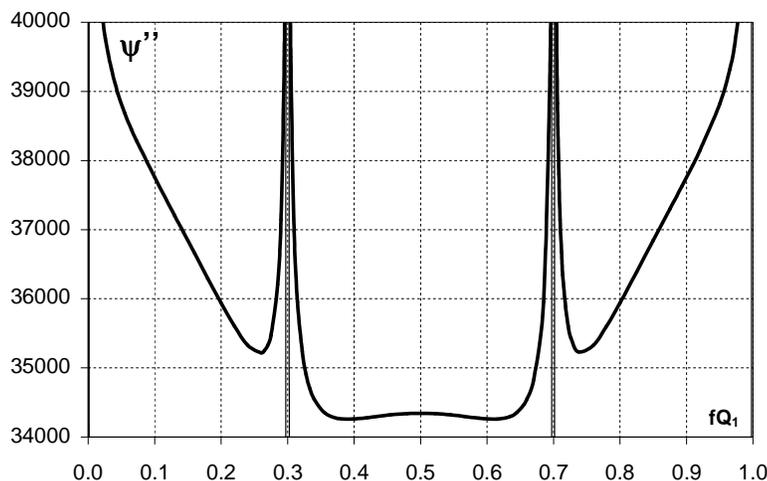


FIGURA 3. Gráfico alternativo de ecuación (4)

## DOS ETAPAS

El propósito principal de la discusión anterior era demostrar la inconveniencia de la búsqueda del óptimo global en el sentido clásico. Pero ese tipo de búsqueda quizás no puede evadirse si las variables de decisión son los diámetros. La alternativa de incluir restricciones de confiabilidad en la búsqueda por diámetros no ha sido exitosa porque la mayoría de las definiciones existentes de confiabilidad no pueden distinguir entre redes malladas o ramificadas.

Pero aún si lo pudieran hacer ese método mantendría la incertidumbre en cuanto a la calidad (optimicidad) de la solución. Con el fin de eliminar, prácticamente, la incertidumbre sobre la calidad de la solución y, al mismo tiempo, quitar del camino tanto a la no-convexidad como a la multimodalidad, Chiong (1985) propuso un procedimiento en dos etapas y formuló el problema en términos de dos conjuntos separados de flujos y cargas.

Las etapas son: (1) calcular los flujos en tuberías solo en función de las demandas y procurando la máxima uniformidad entre ellos; (2) dados todos los flujos, calcular las cargas nodales para obtener el mínimo costo, empleando las ecuaciones (5) y (6) de la primera parte como FOB, sujeta a las ecuaciones (2), (3), y (4) de la primera parte como restricciones. Chiong (1985) introdujo el principio de la varianza mínima para calcular la distribución del flujo en la primera etapa. Este principio tiene un mínimo global único para cualquier configuración y cantidad de fuentes de una red y no necesita especificar las direcciones del flujo a priori. La uniformidad del flujo no solo previene que se abran los circuitos sino que cumple una función importante en cuanto a la confiabilidad.

En la primera parte de este trabajo se explicaron los detalles y ecuaciones en que se basa el principio de la mínima varianza. Véanse las ecuaciones (7) y (8) de la primera parte.

La segunda etapa también produce un óptimo global único porque, si los flujos son conocidos, el problema se torna convexo y unimodal como se ha demostrado en la literatura. Por lo dicho, el procedimiento en dos etapas es directo y produce una solución única, global y reproducible.

A pesar de estas ventajas, el proceso descrito no era capaz de demostrar las ventajas económicas de la red mallada. Esto fue introducido después con una nueva FOB, como ya se estudió en la primera parte de este trabajo. Con la nueva FOB se robustece el procedimiento en dos etapas y se conforma la respuesta a las características mencionadas al principio.

- *ser capaz de producir una red mallada con la redundancia adecuada;* esto se cumple con la primera etapa con la distribución de flujos y se completa en la segunda con la selección de diámetros que toma en cuenta la frecuencia de fallos.
- *la solución que se obtiene es única y reproducible;* el resultado de cada etapa es único, por tanto es reproducible, lo que significa que se llega a la misma solución si se repite el proceso.
- *la solución constituye un óptimo global bajo ciertas condiciones;* el resultado de cada etapa es un óptimo global, en la primera es un mínimo estadístico y en la segunda un mínimo económico.
- *puede aplicarse a redes grandes reales;* el segundo ejemplo de la primera parte sugería esta posibilidad y el autor recientemente aplicó el procedimiento para una demanda de diseño en una red de 184 nodos, 273 tuberías y 90 circuitos con un tiempo de 4.5 minutos en una computadora personal tipo Pentium 4.

Existe, sin embargo, una desventaja en el procedimiento y es la necesidad de redondear los resultados a diámetros comerciales. Esta es una desventaja menor si el surtido disponible de diámetros está completo, es decir, existen todos los usuales. Otra forma de resolver esto sería añadir una tercera etapa que se dedicaría a encontrar los diámetros discretos mediante un algoritmo evolutivo o de programación entera, a partir de que solo es necesario probar dos diámetros en cada tramo. Esto, por supuesto, es materia de investigación futura.

## MAXIMIZAR LA ENTROPIA

La idea de la distribución uniforme de los flujos ha sido analizada también, por otros investigadores, en asociación con el principio de la máxima entropía (Awumah et al. 1991; Tanyimboh y Templeman 2000). Goulter y Bouchart (1990) aplicaron un procedimiento con una distribución de proporciones fijas pero no mencionaron cómo se obtuvo. Awumah et al. (1991) emplean una formulación de entropía basada en flujos hacia nodos (que entra al nodo) en un modelo de optimización y lo aplican al mismo ejemplo de Morgan y Goulter (1985) con una restricción que especifica un nivel mínimo de entropía y obtienen una solución del tipo de dos diámetros por tramo. Este enfoque debe considerarse, cuando menos, como dudoso porque los resultados son semejantes a los del ejemplo original, y Afshar et al. (2005) encontró que estos eran altamente no factibles. No obstante, la formulación de la entropía por flujos hacia nodos, desde el punto de vista práctico, pareciera estar más relacionada con la redundancia que la formulación por flujos desde nodos (que sale del nodo).

Si se emplea el principio de máxima entropía como generador de la distribución uniforme de los flujos, puede aplicarse el proceso en dos etapas. Esto hicieron Tanyimboh y Templeman (2000) junto con una rutina de PNL como segunda etapa, obteniendo diámetros continuos como solución final. Ellos también proponen otro proceso diferente en dos etapas, donde la segunda etapa sería como la PL de Alperovitz y Shamir (1977), que resulta en dos diámetros de tubería por tramo. Su formulación de entropía está basada en flujos desde nodos.

La principal desventaja de usar la entropía como primera etapa es que el resultado es multimodal (Ang y Jowitt 2005) porque la entropía solo puede calcularse si se especifican previamente las direcciones de flujo en todos los tramos. En la Figura 4 se muestran gráficos de entropía basada en flujos desde nodos. Un gráfico es para la red de la Figura 1 y los otros para cada uno de sus nodos.

En el gráfico de la red pueden observarse tres máximos, correspondientes a las tres posibles direcciones diferentes de flujo. Una de esas direcciones es la de la Figura 1, y las otras salen cuando se invierte el flujo de Q2 o el de Q4. Es interesante observar que la entropía no es cero en los puntos donde cualquiera de los flujos es cero. Esto se debe a que, si algún flujo es cero, siempre hay un nodo que tiene dos flujos que salen. Estos puntos de cero flujo se corresponden con versiones ramificadas de la red y muestran valores grandes de entropía. Calculando la proporción de la entropía de estas versiones ramificadas respecto a la máxima en este caso, se obtiene un valor de un 80 %. Un valor similar se obtiene de un ejemplo de Ang y Jowitt (2005), así como de otras pruebas que ha hecho el autor en otras redes. De modo que esta entropía no solo es mayor que cero, en una red ramificada, sino que parece ser una gran parte (entre 75-80%) de la entropía total de una red mallada asociada.

El gráfico para el nodo A muestra un máximo y dos ceros asociados a cuando el flujo Q1 o el Q3 es cero. Los gráficos para los otros nodos muestran segmentos de cero entropía que se corresponden con el intervalo en que el nodo solo recibe agua, o sea, no hay tubería ni flujo de salida del nodo. Excepto para el nodo A, que es la fuente, la entropía nodal máxima ocurre en puntos de flujo nulo. Y otra desventaja es que, en redes grandes, varios nodos pueden tener un solo flujo de salida, que significa entropía cero, mientras que a esos nodos les pueden estar llegando dos y más flujos de entrada.

La multimodalidad de la entropía de una red es notable, véase que, en la mayor parte de su intervalo vertical, hay seis distribuciones de flujo para el mismo valor de entropía. Para dos o más circuitos la cantidad es infinita. Esto significa que, si se añade una restricción de entropía mínima, en una optimización clásica, lo que se hace es añadir una dimensión adicional a la multimodalidad inherente al problema. Hasta ahora no se ha propuesto método alguno capaz de encontrar la entropía máxima global.

Dadas las direcciones de flujo, el cálculo de los valores de flujos para su máxima entropía local es fácil para redes de una sola fuente. Pero para dos o más fuentes, en contra de las optimistas expresiones de Yassin-Kassab et al. (1999), ya no resulta tan fácil. A pesar de que estos autores proponen un método, muy bien explicado, argumentado y aparentemente muy sencillo, para determinar los flujos en redes de varias fuentes, siempre para *direcciones de flujo conocidas*, los ejemplos que presentan son tan pequeños que no pueden avizorarse sus desventajas.

Sea  $NS$  el número de fuentes. El método que han propuesto implica resolver un conjunto de  $NS-1$  ecuaciones polinomiales con  $NS-1$  incógnitas. El grado de cada polinomio es igual al número de nodos de demanda que se conectan a una misma fuente. Una red pequeña puede tener, por ejemplo, 15 nodos de demanda conectados a todas las fuentes.

Mientras más fuentes en la red, más compleja será la solución de un sistema de  $NS-1$  polinomios de grado 15, que no se hace con inmediata facilidad. Pero este no es el problema principal, sino la multiplicidad de soluciones porque ese conjunto de polinomios puede tener hasta 15 vectores de solución. Algunos de ellos pueden ser reales mientras que otros pueden ser complejos. Si los reales son múltiples entonces aparece aquí otro fenómeno de multiplicidad, que surge dentro de las direcciones de flujo especificadas.

Si bien puede ser cierto que el problema de maximizar la entropía, dadas las direcciones de flujo, tenga una solución única para redes de varias fuentes, lo que sucede es que el método propuesto por Yassin-Kassab et al. (1999) puede no conducir a esa solución única para una red mayor que la minúscula red empleada en su ejemplo. En comparación con el criterio de entropía, el principio de la varianza mínima, analizado en la primera parte de este trabajo, tiene varias ventajas para lograr la máxima uniformidad en los flujos: (a) hay una medida estadística explícita de uniformidad; (b) la solución de los flujos es extremadamente fácil de obtener; (c) esta solución es única y da un mínimo global; (d) no es necesario asignar direcciones de flujo de antemano; (e) el proceso de solución es independiente del número de nodos fuente.

Como ilustración, la Tabla 1 muestra una comparación estadística de la distribución de flujo calculada con máxima entropía y con varianza mínima para dos pequeñas redes. La red 1 procede del ejemplo de 8 tuberías dado como caso A en Tanyimboh y Templeman (1993a) y la red 2 es el ejemplo de 7 tuberías de Tanyimboh y Templeman (1993b).

En la Tabla 1, excepto el valor medio, los demás parámetros son medidas de dispersión. Los valores originales de los flujos  $Q$  están expresados en litros por segundo (L/s). Puede verse que la comparación favorece al principio de varianza mínima.

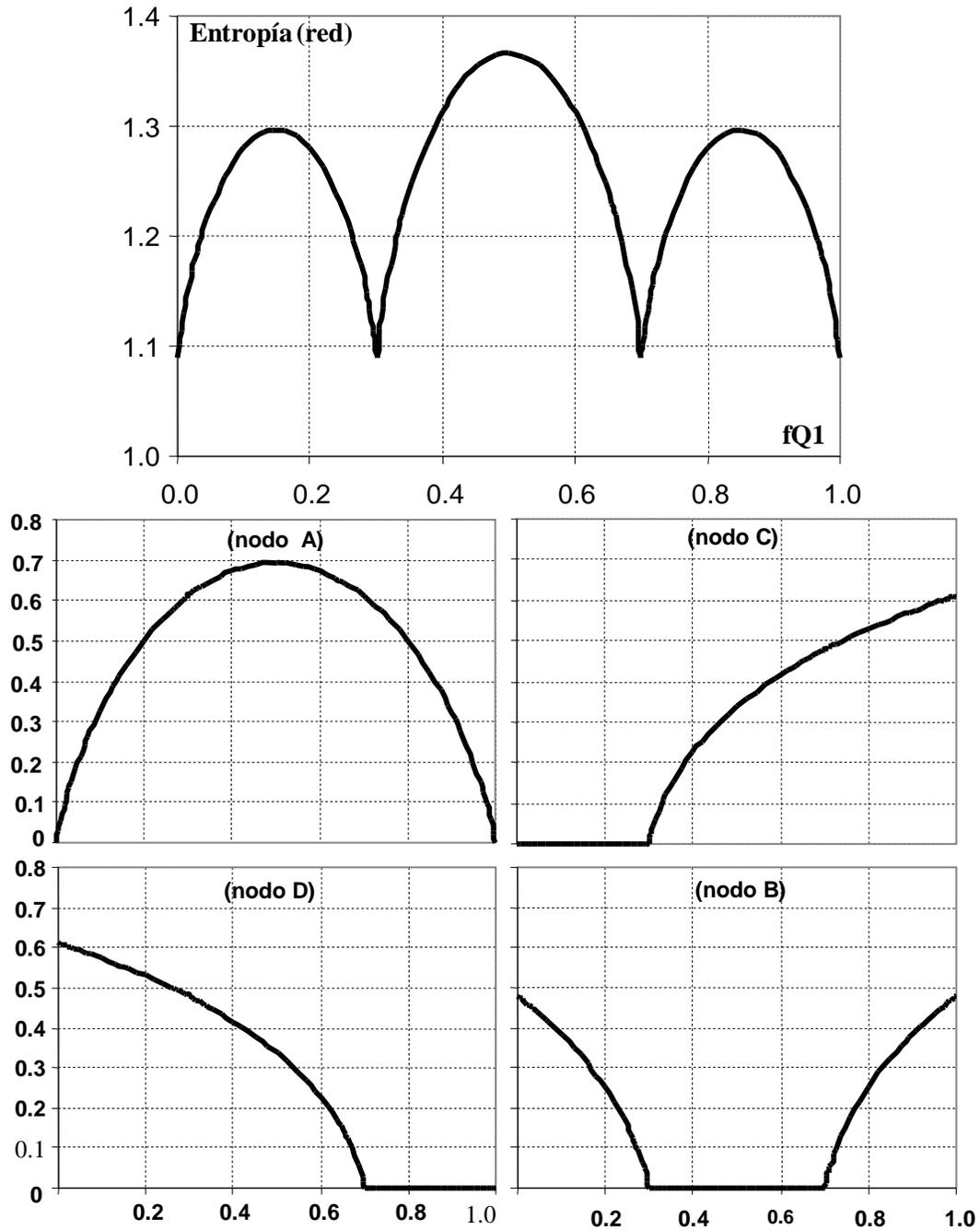


FIGURA 4. Entropía para una red y sus nodos

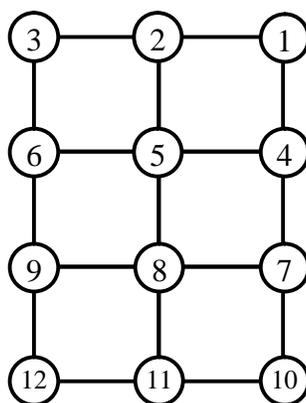
**Tabla 1. Comparación estadística de la distribución de flujo**

red	1	1	2	2
método	máxima entropía	mínima varianza	máxima entropía	mínima varianza
Suma( $Q^2$ )	1334.40	943.75	67309.00	62853.40
Media( $Q$ )	11.146	9.375	80.429	80.429
Varianza	48.654	34.375	3671.286	2928.686
Desviación Std.	6.975	5.863	60.591	54.117
Coef. de Variación	0.6258	0.6254	0.7534	0.6729

**EJEMPLO**

Se introduce un ejemplo con el fin de comparar resultados de optimización entre distribuciones de flujo bajo el concepto de máxima entropía y el de mínima varianza. El ejemplo ha sido tomado de Tanyimboh y Templeman (2000) donde, para el trazado completo de la red mostrada en la Figura 5, sus autores dan una solución para flujos de máxima entropía y costo capital mínimo. Las direcciones de flujo, adoptadas en el trabajo para las tuberías, se ven en dicha figura y se corresponden con el orden numérico de sus dos nodos.

Esta red tiene una sola fuente en el nodo 1 con una carga total  $H = 100$  m. En los demás nodos la elevación del terreno es cero y la presión mínima requerida es de 30 m. Las tuberías todas tienen longitud de 1000 m y el coeficiente de fricción de Hazen-Williams es  $C = 130$ . Las demandas en litros por segundo (L/s) para todos los otros nodos son, en orden: 27.8; 41.7; 41.7; 41.7; 27.8; 55.5; 55.5; 55.5; 27.8; 41.7; 27.8. El costo de tubería por unidad de longitud (ver primera parte) se formula con  $c_l = 0.10$ ,  $\eta = 800$  y  $m = 1.50$ . Los resultados originales de este ejemplo se dan como diámetros continuos.

**FIGURA 5. Red ejemplo**

Se aplica ahora una optimización con la ecuación (9) de la primera parte como FOB y con las restricciones (2), (3) y (4) de la primera parte. Como ya se ha dicho, se calcula la distribución de

flujo como primera etapa por el principio de mínima varianza y en la segunda etapa se calculan las cargas y diámetros continuos óptimos. Estos diámetros se redondean a valores comerciales.

Se supone que existen valores comerciales en múltiplos de 25 mm. El redondeo asigna el valor comercial superior más cercano a menos que el diámetro continuo calculado se encuentre muy cerca del más cercano inferior. Los otros parámetros para la nueva FOB son los mismos que los empleados en el dibujo de la ecuación (4). La carga piezométrica en el nodo crítico de la red se mantiene igual.

Se previeron tres alternativas para comparar resultados. La primera es la optimización original (se denota aquí como T & T), la segunda es la nueva optimización con diámetros continuos (se denota como JB-cont) y la tercera refleja el redondeo de dichos diámetros a valores discretos. (se denota como JB-discr).

La dispersión de los flujos y diámetros resultantes se muestra en la Tabla 2 para las tres alternativas. La distribución de flujo única que se obtiene de la mínima varianza tiene exactamente las mismas direcciones de flujo que la del ejemplo original.

La columna (4) es la de los flujos de máxima entropía, la columna (5) son los flujos de mínima varianza y la columna (6) es la de los flujos obtenidos después de redondear los diámetros. Puede verse que las dos alternativas de la nueva optimización son menos dispersas que la de la solución original. De las columnas (7), (8), (9), que muestran la dispersión de los diámetros, pueden hacerse comentarios similares.

El costo de la alternativa T&T se evalúa con la misma FOB, ecuación (9) de la primera parte. Para completar la comparación de costo y confiabilidad (ver primera parte), cada una de las tres alternativas se somete al simulador “movido por presión” tantas veces como tuberías hay (en este caso 17) considerando una sola tubería rota a la vez. Se calcula entonces el déficit adicional promedio en toda la red y su costo con el mismo precio que tiene el agua en la FOB. Los costos de energía adicional fueron despreciables.

La Tabla 3 muestra la comparación de costos. Las columnas (2)-(4) son los costos de la FOB. El costo capital crece y el costo de fallo decrece a medida que crecen los diámetros. El costo total de la FOB es menor para la segunda alternativa y mayor para la tercera. Cuando se añade el costo del déficit adicional la mejor alternativa es la tercera.

Varios parámetros de confiabilidad se muestran en la Tabla 4. Todos ellos se calculan siguiendo los criterios expuestos en la primera parte. Las columnas (2) y (3) suman 100% y se estiman de la frecuencia de fallo de las tuberías. Mediante los cálculos de déficit se obtiene una confiabilidad nodal volumétrica como la fracción esperada de demanda satisfecha.

La columna (4) es la media geométrica de esas confiabilidades nodales mientras que la columna (5) es la confiabilidad volumétrica de toda la red. La columna (6) muestra la fracción esperada de tiempo en que, al menos, se va a satisfacer el 90 % de la demanda.

**Tabla 2. Comparación de la dispersión en flujos y diámetros**

Tubería	Nodo 1	Nodo 2	T & T	JB-cont	JB-discr	T & T	JB-cont	JB-discr
#	#	#	Q (L/s)	Q (L/s)	Q (L/s)	D (mm)	D (mm)	D (mm)
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
1	1	2	175.65	209.71	204.98	302	313	325
2	1	4	268.85	234.79	239.52	361	321	325
3	2	3	61.57	87.96	91.10	192	224	225
4	2	5	86.28	93.96	86.08	228	231	225
5	4	5	87.61	68.89	72.19	226	209	225
6	4	7	139.54	124.20	125.63	275	247	250
7	3	6	19.87	46.26	49.40	138	192	200
8	5	6	42.94	40.26	37.92	175	181	175
9	5	8	89.26	80.89	78.65	239	224	225
10	7	8	44.23	25.57	25.69	179	158	175
11	7	10	39.81	43.13	44.44	169	182	200
12	6	9	35.00	58.71	59.52	182	221	225
13	8	9	37.49	18.08	18.17	178	154	150
14	8	11	40.49	32.88	30.66	184	181	175
15	10	11	12.01	15.33	16.64	119	150	150
16	9	12	16.99	21.30	22.20	162	182	200
17	11	12	10.81	6.50	5.60	135	145	150
media			71.08	71.08	71.08	202.59	206.76	211.76
varianza			4637	4272	4282	4003	2645	2744
desviación std.			68.09	65.36	65.44	63.27	51.43	52.38
coefic. variación			0.9579	0.9195	0.9206	0.3123	0.2487	0.2473

**Tabla 3. Comparación de costos en \$/año**

Alternativa	Costos de la Función Objetivo			Costo de Déficit Adicional	GRAN TOTAL
	Capital	Fallos	Total		
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
T & T	128125	53687	181812	49412	231224
JB-cont	130577	50079	180656	47724	228380
JB-discr	135314	48412	183726	35698	219424

**Tabla 4. Comparación de confiabilidades en tanto por ciento**

Alter-nativa	Tiempo sin fallos	Tiempo con fallos	Media geométrica confiabilidad nodal	Confiabilidad Volumétrica de toda la red	Tiempo con Dem $\geq$ 90%
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
T & T	97.199096	2.800904	99.631410	99.650490	99.094143
JB-cont	97.380157	2.619843	99.662241	99.668198	99.097657
JB-discr	97.458004	2.541996	99.714407	99.716534	99.238049

Aunque los resultados de todas las alternativas son muy semejantes entre sí, las dos alternativas del proceso propuesto son ligeramente mejores. Dado que el principio de entropía ha sido trabajado ampliamente en la literatura de modo favorable, este resultado confirma el carácter competitivo de las nuevas ideas.

## CONCLUSIONES

Se ha presentado una detallada discusión con evidencias gráficas sobre la inconveniencia de la búsqueda del óptimo global en el sentido clásico. Cuando se usan diámetros como variables de decisión, puede no ser posible evadir ese tipo de búsqueda. La variante de incluir la confiabilidad como restricción adicional en la búsqueda de diámetros no ha sido muy exitosa y, en cualquier caso, mantiene la incertidumbre sobre la calidad (optimidad) de la solución.

Se ha presentado la variante de un proceso en dos etapas, que formula el problema en términos de conjuntos separados de flujos y cargas. Este enfoque elimina prácticamente la incertidumbre sobre la optimidad de la solución y se deshace plenamente de la no-convexidad y la multimodalidad. Es también una clara vindicación económica de la red mallada (primera parte). El estudio crítico del principio de la entropía muestra sus desventajas inherentes. Un ejemplo comparativo demuestra que el proceso propuesto, además de las ventajas del empleo del principio de la mínima varianza, es muy competitivo en lo que concierne a la uniformidad de la distribución de flujos, la uniformidad de los diámetros, el costo y la confiabilidad.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Afshar, M.H., Akbari, M. and Mariño, M.A.** (2005). "Simultaneous layout and size optimization of water distribution networks: engineering approach", *J. Infrastructure Systems*, ASCE, 11, (4), 221-230.
- Alperovits, E., and Shamir, U.** (1977). "Design of optimal water distribution systems." *Water Resour Res.*, 13(6), 885-900.
- Ang, W.K. and Jowitt, P.W.** (2005). "Some new insights on informational entropy for water distribution networks", *Engineering Optimization*, 37(3), 277-289.
- Awumah, K., Goulter, I. C., and Bhatt, S. K.** (1991). "Entropy-based redundancy measures in water distribution network design." *J. Hydr. Engrg., ASCE*, 117(5), 595-614.
- Chiong, C.** (1985). Optimización de redes cerradas, tesis Ph.D., CIH, Universidad CUJAE, La Habana, Cuba.
- Cunha, M.C. and Ribeiro, L.** (2004). "Tabu search algorithms for water network optimization". *European Journal of Operational Research*, Elsevier, 157, pp. 746-758.
- Devi Prasad, T. and Park, N.** (2004). "Multiobjective Genetic Algorithms for Design of Water Distribution Networks". *Journal of Water Resources Planning and Management*, Vol. 130, No. 1, pp. 73-82.
- Farmani, R.; Walters, G. A.; and Savic, D. A.** (2005). "Trade-off between Total Cost and Reliability for Anytown Water Distribution Network", *Journal of Water Resources Planning and Management*, Vol. 131, No. 3, pp. 161-171.
- Goulter, I. and Bouchart, F.** (1990). "Reliability-constrained pipe network model." *J. Hydr. Engrg., ASCE*, 116(2), 211-229.

- Gupta, R. and Bhave, R.** (1996). "Reliability-based design of water distribution systems." *J. Envir. Engrg., ASCE*, 122(1), 51-54.
- Kessler, A. and Shamir, U.** (1989). "Analysis of the linear programming gradient method for optimal design of looped water distribution networks." *Water Resour. Res.*, 25(7), pp. 1469-1480.
- Loganathan, G.V., Greene, J. J. and Ahn, T .J.** (1995). "Design heuristic for global minimum cost water distribution systems." *J. Water Resour. Plng. and Mgmt., ASCE*, 121 (2), 182-192.
- Martínez, J. B.** (2007). "Quantifying the economy of water supply looped networks". *Journal of Hydraulic Engineering., ASCE*, 133(1), 88-97.
- Martínez, J. B.** (2010). "Cost and reliability comparison between branched and looped water supply networks". *Journal of Hydroinformatics, IWA*, 12(2), 150-160.
- Martínez, J. B.** (2011). "Quantifying the economy of flow distribution in water supply looped networks". *Journal of Hydroinformatics, IWA*, 13(4), 687-698.
- Martínez, J. B.; Montalvo, I.; Izquierdo, J. and Pérez-García, R.** (2011). "Reliability and tolerance comparison in water supply networks". *Water Resources Management, EWRA-Springer*, 25(5), 1437-1448.
- Morgan, D. R. and Goulter, I. C.** (1985). "Optimal urban water distribution design." *Water Resour. Res.*, 21(5), 642-652.
- Park, H., and Leibman, J.** (1993). "Redundancy-constrained minimum-cost design of water distribution networks." *J. Water Resour. Plng. and Mgmt., ASCE*, 119(1), 83-98.
- Samani, H. M. V. and Mottaghi, A.** (2006). "Optimization of Water Distribution Networks using Integer Linear Programming". *Journal of Hydraulic Engineering*, Vol. 132, No. 5, pp. 501-509.
- Sarbu, I. and Kalmar, F.** (2002). "Optimization of looped water supply networks". *Periodica Polytechnica Ser. Mech. Eng., University of Timisoara, Romania*, Vol. 46, No. 1, pp. 75-90.
- Savic, D., and Walters, G.** (1997). "Genetic algorithms for least-cost design of water distribution networks". *J. Water Resour. Plng. and Mgmt., ASCE*, 123(2), 67-77.
- Tanyimboh, T. T., and Templeman, A. B.** (1993a). "Calculating maximum entropy flows in networks." *J. Operational Res. Soc.*, 44(4), 383-396.
- Tanyimboh, T. T., and Templeman, A. B.** (1993b). "Optimum design of flexible water distribution networks." *Civ. Engrg. Sys.*, 10(3), 243-258.
- Tanyimboh, T. T., and Templeman, A. B.** (2000). "A quantified assessment of the relationship between the reliability and entropy of water distribution systems." *Engrg. Optimization*, 33, 179-199.
- Varma, K.V.K., Narasimhan, S. and Bhallamudi, S. M.** (1997). "Optimal Design of Water Distribution Systems Using an NLP Method", *J. Envir. Engrg*, Vol. 123, No. 4, April, pp. 381-388.
- Xu, C., and Goulter, I.** (1999). "Reliability based optimal design of water distribution networks." *J. Water Resour. Plng. and Mgmt., ASCE*, 125(6), 352-362.
- Xu, C., and Goulter, I.C.** (1997a). "Simulation-based optimal design of reliable water distribution networks." *Proc., 3rd Int. Conf. on Modeling and Simulation*, A. Zayegh, ed., Victoria University of Technology, Melbourne, 107-112.
- Yassin-Kassab, A., Tanyimboh, T. T., and Templeman, A. B.** (1999). "Calculating Maximum Entropy Flows in Multi-Source, Multi-Demand Networks." *Engrg. Optimization*, 31 (6), 695-729.