

## Antecedentes de la conocida ecuación de Bernoulli

Félix Riaño Valle

email: [riano@tesla.cujae.edu.cu](mailto:riano@tesla.cujae.edu.cu)

Profesor Titular, Dirección de Formación del Profesional, Universidad Tecnológica de La Habana José Antonio Echeverría, (Cujae), La Habana.

### RESUMEN

El artículo presentado tiene como objetivo divulgar los antecedentes de lo que hoy se conoce como ecuación o teorema de Bernoulli. Se estudia la demostración donde Daniel Bernoulli establece, en su tratado Hidrodinámica de 1738, la relación entre la presión y la velocidad del flujo de agua en las tuberías. Ofrece las características generales del contexto en el que ocurre un evento de este tipo, parte del importante movimiento cultural e intelectual, conocido como la Ilustración, que tiene lugar en Europa durante el siglo XVIII. Destaca el papel desempeñado por las Academias Científicas en el desarrollo cultural de esa época. Asimismo, se discuten aspectos poco conocidos de la vida y obra de Daniel Bernoulli, particularmente aquellos relacionados con su condición de físico experimental y profesor.

**Palabras clave:** Bernoulli, física experimental, física teórica, hidráulica, Ilustración.

## Background of the well known Bernoulli equation

### ABSTRACT

The present article aims to divulge the background of what is known as Bernoulli's equation or theorem. The demonstration is studied, where Daniel Bernoulli establishes, in his treatise Hydrodynamica of 1738, the relationship between the pressure and the velocity of the flow of water in pipes. It offers the general characteristics of the context in which such event occurs, as a part of an important cultural and intellectual movement known as the Illustration, which takes place in Europe during the eighteenth century. It highlights the role played by the Scientific Academies in the cultural development of that time. Likewise, little-known aspects of the life and work of Daniel Bernoulli are discussed, particularly those related to his condition as an experimental physicist and professor.

**Keywords:** Bernoulli, experimental physics, theoretical physics, hydraulics, Illustration.

## INTRODUCCIÓN

La obra de Daniel Bernoulli merece ser más estudiada y dada a conocer. Célebre por lo que no hizo y muy poco recordado por sus aportes, fue, sin dudas, un investigador sobresaliente. Nacido en el año 1700, en un ambiente familiar de hombres de ciencia, su quehacer científico estuvo, también, muy influenciado por la época que le tocó vivir. El siglo XVIII es uno de los períodos más trascendentales de la historia, caracterizado por la ocurrencia de acontecimientos en el orden, político, económico, social y cultural, que fueron decisivos para el ulterior desarrollo de la humanidad. La Revolución Francesa es su suceso más prominente. Marcó un antes y un después.

El progreso alcanzado en las distintas ramas del saber en esa centuria fue colosal, tanto, que también se le conoce como el Siglo de las Ciencias. En especial, la Hidráulica Teórica y la Experimental lograron niveles nunca alcanzados. En este período, se sintetizan, establecen, sistematizan y desarrollan todos los conocimientos que sobre esta parte de la Física se habían acumulado a lo largo de miles de años (Riaño 2016).

En un trabajo anterior (Riaño 2014) se hizo un análisis de los acontecimientos científicos más relevantes ocurridos durante el siglo XVII, que sentaron las bases para el nacimiento de la Hidrodinámica Teórica, subrayando en particular la importancia de los aportes de Isaac Newton. Además, se resumieron algunos aspectos fundamentales de la vida y obra de sus fundadores, Euler, Bernoulli, Clairaut y D'Alembert.

El presente artículo, quinto de una serie que trata sobre la historia de la hidráulica, tiene como objetivo mostrar el teorema original formulado por Daniel Bernoulli en 1738 en su Tratado Hydrodynamica y su fundamento matemático. En este, estableció la relación que existe entre la presión y la velocidad en el movimiento de un fluido por una tubería, aporte de gran alcance para el estudio de la Hidráulica. Se confirma que nunca propuso una expresión como la que se le atribuye y hoy lleva su nombre.

Además, en el trabajo se señalan aspectos poco divulgados de la vida y obra de Daniel Bernoulli, en particular aquellas relacionadas con su condición de físico, su vocación para la experimentación y su gran amistad con Euler. También se dan a conocer sus aptitudes como profesor vinculado casi toda su vida al quehacer universitario.

En el escrito se brindan características fundamentales del escenario cultural del siglo XVIII, destacándose en particular lo referido al surgimiento y consolidación de las Academias, creadas para promover y socializar las investigaciones científicas.

El autor, dedicado durante muchos años a la enseñanza de la Ingeniería Hidráulica, considera de gran utilidad conocer los contextos históricos en que los acontecimientos científicos se realizaron y sus verdaderos resultados, en algunas ocasiones, como es el caso, distorsionados en el tiempo. Esto, a la vez que constituye una motivación para las clases, contribuye a la formación integral de nuestros estudiantes.

Como en trabajos anteriores, el autor reconoce, el inestimable valor del texto History of Hydraulics de Hunter Rouse y Simon Ince (Rouse and Ince 1957) por sus precisiones históricas. De igual manera resultó muy valioso el libro de Enzo Levi, El agua según la Ciencia, (Levi

2001), en particular, lo referido a la demostración actualizada del Teorema presentado por Bernoulli en su tratado *Hydrodynamica* y sus comentarios.

## **EUROPA EN EL SIGLO XVIII**

El siglo XVIII europeo está caracterizado por un fuerte movimiento cultural e intelectual basado en la idea de que todo puede ser esclarecido por la mente humana usando el razonamiento y los métodos científicos. Esta corriente de pensamiento que se gesta en el período de la llamada Revolución Científica significa un cambio decisivo en la forma de tratar el conocimiento. Es conocida como Ilustración, por su propósito de disipar las tinieblas mediante las luces de la razón. París es su cuna, convirtiéndose para siempre en “La Ciudad de las Luces”.

Europa se desarrolla, vive momentos de gran esplendor, su población aumenta en 60 millones en apenas 100 años, las ciudades crecen, la economía prospera impulsada por la Revolución Industrial nacida en el Reino Unido y expandida por todo el Continente. La gente mejora sus condiciones de vida.

Una nueva manera de pensar triunfa, se rompe la visión mágica de la naturaleza, la mirada del mundo cambia. El conocimiento debe imponerse a la ignorancia. La Ilustración se expande por Europa e influye en las formas monárquicas de gobierno al punto que, monarcas absolutos de algunos países, incluyen las ideas de la Ilustración en la forma de regir sus reinos. Aparecen los Déspotas Ilustrados. Esto sin dejar de ser soberanos absolutos, ahora con un lema que los define: “Todo para el pueblo pero sin el pueblo”. Los reinados de España, Francia, Prusia, Rusia y Austria son un ejemplo de ello.

La Ilustración fue una época de progreso considerable del conocimiento científico influenciada en muchos sentidos por las ideas de filósofos del período anterior, como Pascal, Leibniz, Galileo y Newton, que rompen con una visión inexplicable del mundo promoviendo verlo como un objeto que puede ser estudiado y conocido por el hombre. Se origina un nuevo enfoque de la religión que se aparta de los dogmas, se estimula la confianza en el ser humano y en su progreso, que ya no están en manos de Dios, sino en sus propios esfuerzos e inteligencia.

La Ilustración divulga sus ideas, socializa el conocimiento, se estimula la necesidad de enseñar y aprender tratando de erradicar la ignorancia.

La actividad científica crece, es más colectiva, no puede verse como algo individual. Los científicos necesitan conocer otras opiniones, es necesario socializar las ideas.

### **Se fortalecen las Academias Científicas**

Aunque ya en el siglo XV se manifiesta en alguna medida la necesidad de lograr un mayor intercambio entre los científicos, es durante los siglos XVI y XVII, en el marco de la llamada Revolución Científica, que comienza a notarse un creciente flujo de información entre los hombres de ciencia. Son conocidos, por ejemplo, los amplios intercambios de correspondencia entre Castelli y Galileo, de este último con Torricelli y este a su vez con Ricci. Galileo es el maestro, el que todos quieren consultar. Aparecen los “corresponsales científicos” que actúan como receptores de información, encargados de distribuirla a los que consideran interesados según el tema. El Padre Mersenne de París es quizás el más conocido, aunque, existen otros.

Pero esto no es suficiente, la circulación de documentos crece de manera considerable, ya un hombre no es capaz de compilarlo todo, es necesario crear una organización que clasifique, valore y distribuya la información recibida. Aparecen entonces las Academias Científicas.

La primera academia reconocida se funda a principios del siglo XVII, la del Lincei, en Roma, (1603 – 1630). Galileo Galilei fue uno de sus fundadores. En 1657 se origina la del Cimento, que se mantuvo durante diez años. En 1660 ve la luz la Royal Society of London for improving natural knowledge, con gran influencia en el ámbito científico en toda Europa. Newton, su representante más genuino, fue su presidente durante 23 años, hasta su muerte.

En 1665 aparecen, bajo los auspicios de esta Sociedad, los Philosophical Transactions of the Royal Society, la más antigua de las revistas científicas que existen hoy en día. En este mismo siglo nace la de París, integrada por miembros eminentes. Ya la ciencia no puede verse de manera individual, se hace más colectiva. En estas sociedades encuentra su expresión más acabada (Levi 2001).

La difusión del conocimiento fue uno de los pilares de la Ilustración. Los medios utilizados fueron variados pero, en primer lugar, hay que señalar el papel de las Academias Científicas. Convertidas en verdaderos centros intelectuales con una nueva forma de pensamiento, estimulan el debate y la cooperación.

Es importante notar que este proceso de socialización y estímulo al desarrollo científico, ocurre a espaldas de las universidades, que, aferradas a esquemas obsoletos de enseñanza y gran dependencia de la Iglesia, no son capaces de asimilar y difundir el nuevo conocimiento. (Roca 2003) Es una época en que la universidad y la sociedad tienen posiciones antagónicas. Los acontecimientos por venir tendrán que resolver esta situación.

A diferencia de las universidades, es interesante señalar el papel de las monarquías ilustradas, que potencian la educación y la cultura y apoyan el desarrollo científico. Así, los hombres de ciencias cuentan con el apoyo de los reyes ilustrados, ahora pueden dedicarse por entero a la investigación. Surge la profesión de científico. (Roca 2003)

Es en este contexto, que se funda en 1724, por el zar Pedro El Grande, la Academia de San Petersburgo, la cual es auspiciada por la Emperatriz Catalina I cuando fallece el zar.

### **DANIEL BERNOULLI: ESTANCIA EN SAN PETERSBURGO**

El propio Daniel reconoció en su autobiografía que los años más creativos de su vida científica, fueron los que pasó en la Academia de San Petersburgo estimulado por las discusiones fraternales con su colega y amigo Euler. Con solo 25 años, Daniel llega a San Petersburgo.

Nacido en una familia de eminentes matemáticos que gozaba de prestigio en Europa, su padre quiere que se dedique al comercio, pero esta no era su vocación. Estudió medicina y se graduó en 1721. Sin trabajo, los dos años siguientes los dedica a profundizar en la que desde niño fue su gran predilección: las matemáticas.

En 1723 viaja a Venecia para trabajar con el fisiólogo Michelotti, gran amigo de su padre. Allí

conoce al Conde Riccati, muy aficionado a las matemáticas y que se dedica también a mejorar los canales de agua. Daniel, muy interesado en esos temas, colabora con él.

Esta estancia tiene una gran importancia en su vida; se vincula por primera vez a la hidráulica y en 1724 con la ayuda de un amigo, publica su primer libro, “Ejercitaciones Matemáticas” en el que entre otros temas, escribe una teoría sobre líquidos. Esta obra tuvo gran repercusión en Italia y lo da a conocer.

Con el deseo de que su academia sea de las más prestigiosas, la emperatriz Catalina I quiere tener entre sus miembros a los científicos más distinguidos. De esta manera, invita a Nicolás Bernoulli a formar parte de la sociedad, quien, a instancias de Daniel, pide como condición que este sea invitado también.

Hay que señalar que a pesar de su juventud, ya Nicolás era un matemático conocido, con aportes en el campo de las probabilidades. La reina acepta y en 1725 llegan los dos a San Petersburgo.

Poco tiempo después, Nicolás fallece víctima de fiebres, Daniel se siente muy solo, tenía gran afinidad con su hermano solo cinco años mayor que él. Así, animado por el deseo de formar una poderosa escuela de fisiología con el estilo mecánico-matemático, invita a la Academia a su gran amigo y compañero de estudios cuando era niño, en Basilea, Leonhard Euler. (Sánchez y Valdés 2014).

De esta relación de trabajo entre Euler y Bernoulli, fortalecida por la convivencia en San Petersburgo y mantenida luego por la vía epistolar, se ha divulgado poco. Se ha dicho que Bernoulli dependía de Euler para guiar sus matemáticas y Euler de Bernoulli para la comprensión de los fenómenos físicos (Velasco 2007).

Los trabajos iniciales que condujeron a escribir el Tratado Hydrodynamica fueron desarrollados independientemente por uno y otro, aplicando el principio de conservación de las “fuerzas vivas”. Cuando en 1727 presentan el resultado de sus trabajos, ante la Academia, comprueban que eran idénticos.

Entonces, Euler cambia sus planes investigativos y concede sus derechos a su amigo para que ampliara los estudios en este campo (Mihailov 2005). Este hecho curioso y poco común, es muestra de la gran amistad que existió entre ellos.

En este ambiente de trabajo, Daniel Bernoulli escribe “Hydrodynamica”, segundo y último libro que escriba y que lo immortalice. Acerca del autor, D’Alembert, físico y matemático brillante, como se ha dicho, considerado uno de los fundadores de la hidrodinámica teórica, dijo:

“Bernoulli parece haber sido el primero en reducir las leyes del movimiento de los fluidos a principios seguros y no arbitrarios, los cuales ningún autor había hecho antes que él.” (Rouse and Ince 1957).

A pesar de las dificultades que supone la traducción de un texto escrito en latín, su importancia indiscutible amerita ser más divulgado entre los estudiosos de la Mecánica de los Fluidos.

## **FUNDAMENTO MATEMÁTICO DEL TEOREMA DE BERNOULLI DE 1738**

Se han cumplido 280 años de la publicación del Tratado “Hydrodynamica”, primer estudio teórico del movimiento de los fluidos probado experimentalmente. Fue el texto que más influencia tuvo en el desarrollo de la Mecánica de los Fluidos durante el siglo XVIII.

Es interesante apuntar que Daniel Bernoulli y Euler comenzaron a interesarse por el problema del movimiento de los fluidos motivados por conocer el comportamiento de la circulación de la sangre en el cuerpo humano.

Es Daniel Bernoulli quién por primera vez usa el término “hidrodinámica” para abarcar temas de hidrostática e hidráulica en general. La expresión ha tenido tal repercusión que, cuando se menciona, se relaciona de manera involuntaria con el comportamiento de los fluidos ideales aunque literalmente la palabra no lo implica.

“Hydrodynamica” consta de 12 capítulos, cuyos títulos abreviados son los siguientes: Equilibrio de los fluidos en reposo, Velocidad del flujo, Problemas temporales, Flujo bajo carga constante, Oscilaciones de líquidos, Conservación de energía, Perdidas de energía, Máquinas hidráulicas, Movimiento del aire y otros gases, Vórtices y líquidos moviéndose en recipientes, Hidráulico – estática y Reacción de fluidos (Rouse and Ince 1957).

De particular interés para los estudiosos de la Hidráulica, es conocer los antecedentes de lo que hoy se conoce como “teorema de Bernoulli”. En el capítulo titulado “hydraulic – statics” de su tratado se encuentra el motivo del desacierto.

El problema a resolver es calcular la presión que ejerce un fluido en movimiento sobre las paredes de la tubería.

Para dar solución al problema, se basa en el principio de conservación de las “fuerzas vivas” propuesto por Huygens y Leibniz para cuerpos sólidos cayendo por la acción de la gravedad. Es decir, la igualdad entre lo que ahora se llama energía potencial y energía cinética. Es oportuno señalar que este enfoque de la mecánica se conocía solo hacía unas pocas décadas y recién comenzaba a tener atención en los círculos científicos de Europa.

Para aplicar esas ideas, supone que el fluido está compuesto por una serie de rebanadas que se extienden a través de la sección del flujo y que todas sus partículas se mueven con igual velocidad sin que exista interferencia entre las partículas en la dirección del movimiento.

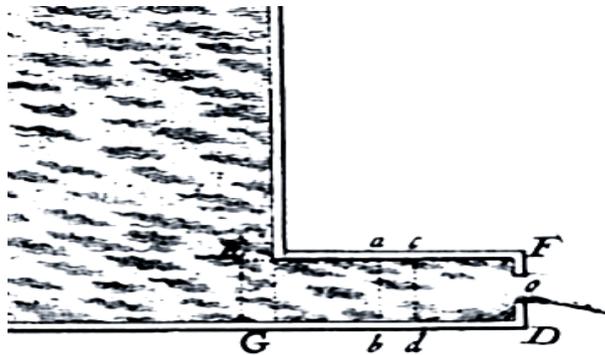
Esta manera de considerar al fluido constituye la piedra angular de sus demostraciones convirtiéndose en guía para futuros trabajos y origen para el desarrollo de nuevos conceptos relacionados con el movimiento de los fluidos.

La aplicación del cálculo “leibniziano” fue determinante pues las rebanadas fueron expresadas en términos diferenciales.

Es necesario recordar que, en el siglo XVIII, los matemáticos trabajaban con proporcionalidades, aún el factor  $\frac{1}{2}$  no se había introducido para definir el término que hoy se conoce como energía cinética, tampoco el término  $2g$  para calcular la velocidad de salida por un orificio. Además, era común tratar la masa, el peso y el volumen con los mismos términos.

Todo esto hace que la demostración presentada por Bernoulli en su tratado *Hydrodynamica* sea un tanto confusa. Procedió como sigue:

Adopta un recipiente muy grande lleno de agua, con carga constante, con una tubería de salida con un orificio  $o$  en su extremo, a través del cual el agua sale con una velocidad constante, como aparece en la figura 1 (Rouse and Ince 1957).



**Figura 1. Diagrama de flujo utilizado por Daniel Bernoulli** [Fuente: Pedroza et al. (2007)]

Si  $a$  es la altura sobre el orificio  $o$ , la velocidad del agua una vez que el flujo se establece es constante e igual a  $\sqrt{a}$ . Si  $n$  es la relación entre la sección del tubo y la del orificio, la velocidad del agua en el tubo será, aplicando la ley de continuidad  $\sqrt{a/n}$ .

El hecho de que el agua estuviera impedida de seguir con una mayor velocidad, se traduce en una mayor presión sobre los lados de la tubería, la cual es, según propone Bernoulli, directamente proporcional a la aceleración que el fluido sufriría si el tapón  $FD$ , que contiene al orificio, desapareciera instantáneamente dejando escapar el agua a la atmósfera.

Agrega Daniel que todo tiene lugar como si durante el movimiento del flujo hacia el orificio, el extremo  $FD$  se cortara instantáneamente y se determinara la aceleración que la porción  $dx$  ( $abcd$ ) podría recibir.

Si el área del orificio se considera como la unidad, entonces la sección de la tubería es  $n$ , la distancia  $Ec$  es  $c$  y la rebanada avanza en el tubo en el mismo momento en que  $dx$  escapa de él. La rebanada en  $E$  tiene un volumen  $ndx$  que antes de entrar al tubo tiene velocidad igual a 0 y adquiere una velocidad  $v$ , justo a la entrada del tubo, es decir la fuerza viva,  $n dx v^2$ .

Esta fuerza viva,  $n dx v^2$  se incrementa en su recorrido desde  $E$  hasta  $c$  en un valor que será igual a la variación de la energía cinética la cual es  $2n c v dv$ .

Quedando entonces:

$$n v^2 dx + 2n c v dv = n a dx \quad (1)$$

Donde  $n a dx$  es lo que Bernoulli llamó “*actual descent*” de la rebanada debido a la altura  $a$ , es decir, la energía potencial.

Agrupando términos se tiene:

$$v dv/dx = (a - v^2)/2c \quad (2)$$

En todo el movimiento el incremento  $dv$  de la velocidad es proporcional a la presión producida en el tiempo  $dx / v$ . Entonces, en este caso, la presión que se ejerce sobre la rebanada  $a d$  es proporcional a la cantidad  $v dv/dx$  es decir a  $(a - v^2 / 2c)$ . En el momento en que el tubo se corta  $v = \sqrt{a/n}$  o lo que es igual  $v^2 = a/n^2$  expresión que, cuando se sustituye en (2) queda:

$$v dv/dx = \frac{(n^2 - 1)a}{2n^2c} \quad (3)$$

En la expresión (2), si el orificio es infinitamente pequeño, la velocidad tiende a 0 y el agua ejerce toda la presión que corresponde con la altura  $a$ , por tanto:

$$v dv/dx = \frac{a}{2c} \quad (4)$$

Entonces, estableciendo la proporcionalidad entre (3) y (4) obtenidos de la sustitución en (2) la presión correspondiente será:

$$\frac{(n^2 - 1)a}{n^2} \quad (4a)$$

Expresión que es independiente de  $c$ , es decir, válida en cualquier sección de la tubería. Hasta aquí lo planteado por Daniel Bernoulli (Rouse and Ince 1957).

Es necesario aclarar que cuando Daniel se refiere a presión en realidad habla de “carga a presión” y en ningún momento usó la letra “ $p$ ” para identificar este término.

Otra forma de expresar la ecuación (4a), permite entender mejor sus conclusiones.

$$a - a/n^2 \quad (4b)$$

Como se recordará  $a/n^2$  es el cuadrado de la velocidad  $v$  que existía antes de eliminar el tapón en el extremo de la tubería, que él ahora designa, curiosamente, adelantándose en el tiempo, por la altura  $b$ .

En las ecuaciones (4a) y (4b) si  $n$  tiende a  $\infty$ , el área del orificio tiende a 0, y, como se ha dicho, la presión sería la debida a la altura  $a$ . Si  $n = 1$ , el área del orificio es igual al de la tubería y no se ejerce presión sobre las paredes de la tubería.

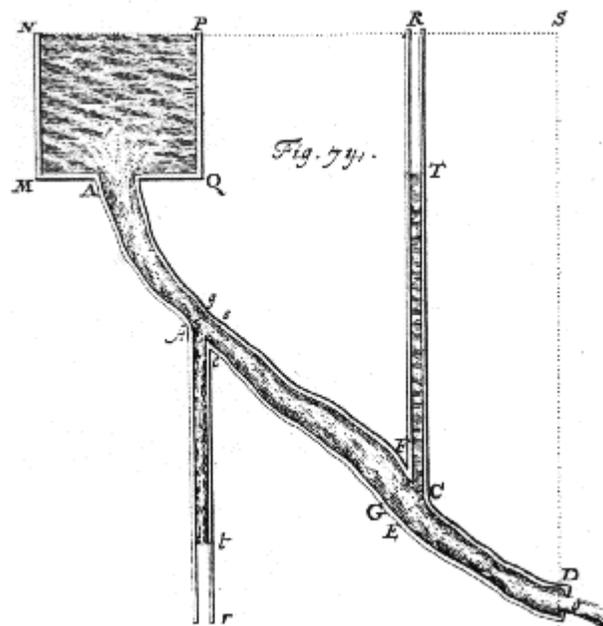
Es interesante destacar que, aunque en su demostración Bernoulli provoca un aumento instantáneo de la velocidad al cortar el tubo, esto no significa que se introduzcan presiones anormales como ocurre en el golpe de ariete.

De esta manera Bernoulli establece en el capítulo titulado “hydraulic – statics”, el teorema que relaciona los valores de la velocidad con los de la presión de la forma siguiente:

“Para calcular la acción del agua de una manera general, se designa por  $v$  la velocidad del agua en un lugar y momento en el que se desea conocer esa acción; si uno asume que la velocidad corresponde a la altura  $b$  la presión del agua será  $a - b$ .”

“De esto no es difícil predecir las leyes de la hidráulica – estática, asumiendo cualquier forma de recipiente y cualquiera que sea la velocidad. La presión del agua siempre será igual a  $a - b$ , en la cual  $a$  representa la altura correspondiente a la velocidad con la cual el agua podría salir desde un orificio vertical después de un tiempo infinito, manteniendo el tanque lleno y  $b$  por la altura correspondiente a la velocidad efectiva. Es en realidad curioso que tal simple ley de la naturaleza haya sido ignorada hasta ahora” (Rouse and Ince 1957).

Estas conclusiones fueron demostradas experimentalmente por Bernoulli, mediante un tanque como el de la figura 2 y una tubería de salida en la que se coloca un piezómetro.



**Figura 2. Esquema del experimento de Daniel Bernoulli [Fuente: Levi (2001)]**

Dice Daniel: “Si en el conducto se hubiese insertado en el orificio un pequeño tubo, el agua subiría hasta alcanzar cierto nivel de equilibrio sostenido por la que fluye por debajo del conducto de modo que aquí se realizaría un equilibrio entre el agua corriente y la estática por lo cual consideré llamar a esta teoría “hidráulico – estático”.

En cuanto a la sección *ec* apunta: “la situación debe considerarse como si en lugar de la columna de agua NT que descansa encima de la corriente y queda en equilibrio con ella, se colgara la columna *nt* cuya tendencia a descender resultaría contrarrestada por la atracción de la corriente misma” (Levi 2001).

Otra forma de la demostración utilizando una nomenclatura más actualizada, permite interpretar mejor sus resultados (Levi 2001).

En la figura 1, llámese *h* a la altura del agua en el tanque de carga constante, considérese una rebanada de ancho *dx*, antes de entrar al tubo, siendo *n* su sección, aplicando el principio de conservación de la energía, se tiene:

$\rho n dx v^2/2$  - Energía cinética de elemento considerado

$c dE/dx = c \rho n v dv$  - Variación de la energía cinética en la distancia  $E_c = c$

$\rho g n dx h$  - Energía potencial del elemento considerado

$$\rho n dx v^2/2 + c \rho n v dv = \rho g n dx h \quad (5)$$

Eliminando  $\rho n$  agrupando términos, y dividiendo por *dx* queda:

$$v dv/dx = g h/c (1 - v^2/2g h) \quad (6)$$

Que representa el cambio de velocidad en el tiempo *dx/v* luego que el orificio *o* se quita o lo que es lo mismo, se corta instantáneamente la tubería.

Cuando el área del orificio es muy pequeña, la velocidad tiende a cero y la aceleración es  $v dv/dx = h g/c$  y la presión en el tubo será igual a *Po*. Planteando la proporcionalidad entre el valor de la presión para esta aceleración y la correspondiente a la de la ecuación (6), se tiene que:

$$P_1 = P_o - \rho V^2 / 2 \quad (7)$$

donde:  $P_1$  = Presión estática en un punto de la tubería

$\rho V_1^2/2$  = Presión dinámica

Si se divide todo por  $\gamma$  se tiene:

$$\frac{P_1}{\gamma} = \frac{P_o}{\gamma} - \frac{\rho V_1^2}{2\gamma} \quad (8)$$

Pero:  $\frac{P_o}{\gamma} = h = K$  tanque de carga constante

Entonces:

$$\frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} = K \quad (9)$$

Esta expresión, derivada de la planteada por Daniel, fue el antecedente del Teorema que hoy lleva su nombre y motivo del equívoco.

Bernoulli no precisa que su demostración es solo para fluido incompresible y régimen permanente. En realidad, analizó la relación entre la velocidad media del fluido y la presión sobre las paredes de la tubería haciéndolo sin tener un concepto claro de presión (Mikhailov 2005).

### **DANIEL BERNOULLI: FISICO EXPERIMENTAL Y PROFESOR**

La trascendencia de los aportes de Bernoulli al estudio de la Mecánica de los Fluidos han sido tales que, aspectos fundamentales que caracterizan su obra, están casi olvidados. Uno de ellos es su indiscutible vocación por la Física Experimental y su habilidad en la construcción del equipamiento necesario.

En este sentido y a propósito de su tratado *Hydrodynamica* expresó:

“Concebí toda la teoría en mi mente, escribí el tratado, hice conocer en privado entre amigos, la mayor parte de él, hasta bosquejé algunas cosas en presencia de nuestra asociación, antes de emprender ningún experimento; y esto para evitar que mediciones preconcebidas me engañaran por una opinión falsa que, sin embargo, la satisficiera con buena aproximación. Luego de todo eso, por fin, se realizaron los experimentos frente a mis amigos y concordaron con la teoría, tanto como yo mismo apenas había podido esperar” (Levi 2001).

Se hace evidente aquí el rigor del método empleado y el enfoque práctico de los problemas estudiados.

En su discurso de homenaje póstumo Condorcet afirmó:

“Nadie encontró más recursos en análisis para someter al cálculo todas las circunstancias de un fenómeno; nadie sabía mejor cómo organizar un experimento, para confirmar resultados teóricos o para proporcionar una base para el cálculo. En todas partes él es un filósofo y un físico, así como un matemático.” (Sánchez y Valdés 2014).

Sus trabajos en el campo de la experimentación lo llevaron a ser el primero en usar el piezómetro abierto en las paredes de los conductos para medir la presión en tuberías, instrumento que utilizó en innumerables ocasiones.

Presentó soluciones para determinar la forma de la superficie del agua en recipientes en rotación.

Estudió el problema de la oscilación en vasos comunicantes y lo generalizó, tomando el período de un simple péndulo como tiempo de referencia.

Fue el primero en analizar el establecimiento gradual del flujo en una tubería larga.

Planteó la idea de la propulsión a chorros para barcos.

Por medio de la experimentación, descubrió el problema de la adhesión del agua a las paredes de un tubo de vidrio de pequeño diámetro doblado en  $U$  y dedujo que el retraso del movimiento en el tubo es mayor en la medida que este es de menor diámetro.

Dio una explicación coherente al problema de la carga actuante sobre un orificio en el fondo de un recipiente. Este asunto, analizado por Newton mediante la hipótesis de la “catarata”, a veces llamado de la “doble columna”, había provocado desconcierto y gran polémica en el mundo académico de la época. Para ello, además de la demostración matemática, construyó un tanque y observó la trayectoria de las partículas coloreadas previamente colocadas en el mismo.

Algo muy poco conocido, al menos en nuestro medio, es que, tomando como punto de partida sus estudios sobre las variaciones de la presión y la velocidad en tuberías, propuso una manera de medir la presión sanguínea midiendo la altura que sube la sangre en un capilar colocado mediante un pinchazo en una de las arterias del cuerpo humano. Este procedimiento fue usado hasta 1876 que se creó el primer dispositivo para medir la presión arterial sin tener que hacer una incisión en una arteria (Thieren 2017).

Además de su talento indiscutible para la aplicación de las Matemáticas a problemas concretos de la naturaleza, Daniel fue capaz de preparar los experimentos que le permitieran comprobar los resultados de sus teorías.

También participó en los cálculos de ingeniería necesarios para la construcción de más de 80 fuentes, estanques y un acueducto en el nuevo Palacio de Verano o Petrodvorets, residencia de los zares.

Daniel Bernoulli, a veces opacado por la grandeza de su padre Johann y de su gran amigo, Euler, fue ante todo un científico con una clara convicción de la necesidad de validar la teoría con la experimentación. Fue un clásico hombre de la Ilustración.

Otro aspecto de su obra no suficientemente reconocido es su faceta como profesor.

A lo largo de toda su vida estuvo relacionado con la docencia. En 1725, siendo muy joven, fue profesor de Matemáticas en San Petersburgo, a su regreso a Basilea, en 1734 ocupó la cátedra de Anatomía y Botánica. Daniel dominaba varios idiomas entre ellos el latín, de uso frecuente en los medios académicos.

Sus clases se distinguieron por su clara exposición y la didáctica empleada, poco común para la época. En particular, fueron famosas en toda Europa sus conferencias de Física Teórica y sobre todo de Física Experimental por la forma peculiar como las impartía. A ellas asistían estudiantes de diversas ciudades, a veces en cantidades apreciables.

Fue Rector de la Universidad de Basilea en dos ocasiones, en 1744 y en 1756, a la que hizo donaciones de importantes sumas de dinero para la compra de equipos de laboratorio y bibliografía. Al final de sus días ordenó la construcción de un hostel para albergar estudiantes de bajos recursos.

Daniel Bernoulli publicó 86 trabajos científicos y ganó diez premios de la Academia de Ciencias de París por sus aportes en distintas esferas del conocimiento humano, solo superado por Euler que recibió 13. Es uno de los hombres de ciencia más importantes de la Ilustración.

### **Nota final**

Inmediatamente después de la edición de Strasburgo, Daniel Bernoulli discutió la posibilidad de publicar una segunda edición de su tratado *Hydrodynamica* en el verano de 1738, también se conoce que a finales de 1740 negoció una posible edición en francés. Ni una cosa ni la otra ocurrieron.

Entre 1737 y 1739 el padre de Daniel, Johann, envidioso por el *Hydrodynamica* publicado por su hijo, escribió un interesante libro titulado *Hidráulica* en el que aparecen temas que Daniel había investigado ya, pero sin mencionarlo, incluso plagió algunas de sus partes y falsificó la fecha de su publicación ubicándola en 1732.

Este hecho marcó para siempre la personalidad de Daniel, causándole una profunda depresión. Dejó definitivamente sus investigaciones sobre dinámica de los fluidos. Sin dudas el pesado trauma psicológico infligido por su padre impidió, quizás, un mayor desarrollo de esta parte de la ciencia en ese siglo (Mikhailov 2005). Dedicó el resto de su vida a la botánica, la anatomía y las matemáticas puras.

Irónicamente, sin embargo, algunos autores plantean que Johann Bernoulli, padre de Daniel, en su libro *Hidráulica*, realmente publicado en 1742, presentó una ecuación que contempla las tres formas de energía, que en su expresión moderna se escribe como  $P/\gamma + V^2/2g + h = K$  (Pedroza et al. 2007). Esta información no ha sido corroborada con otras fuentes.

Según Rouse and Ince (1957) parece haber sido Julius Weisbach quien popularizó la aplicación de la ecuación de Bernoulli tal como se hace hoy.

### **CONCLUSIONES**

- La relación entre la presión y la velocidad media del agua en una tubería, definida por Daniel Bernoulli en 1738, constituye el antecedente del teorema que hoy lleva su nombre.
- Bernoulli, fue un científico excepcional, matemático brillante, era también físico con una notable vocación por la experimentación a la que hizo importantes aportes. Fue de los primeros en aplicar la matemática a la solución de problemas físicos.
- Se distinguió por ser un excelente profesor universitario.
- Las Academias Científicas jugaron un importante papel en el desarrollo cultural en Europa durante el siglo XVIII.

## REFERENCIAS

- Levi L.** (2001). “El agua según la ciencia”. Avances en Hidráulica 8. AMH IMTA, México, extraído de: [http://www.repositorio.imta.mx/bitstream/20.500.12013/972/1/IMTA\\_029.pdf](http://www.repositorio.imta.mx/bitstream/20.500.12013/972/1/IMTA_029.pdf) en octubre de 2018.
- Mikhailov G. K.** (2005). “Daniel Bernoulli, Hydrodynamica 1738, Land mark writings in western mathematics 1640 – 1940, capítulo 9”, Editado por Ivor Grattan – Guinnes, Amsterdam, extraído de <https://books.google.com/cu/books?id=UdGBy8iLpocC&pg=PA142&lpg=PA142&dq=mikhailov+%2B+Hydrodynamica&source=b>, <https://books.google.com/cu/books?id=UdGBy8iLpocC&pg=PA142&lpg=PA142&dq=mikhailov+%2B+Hydrodynamica&source=b> en enero de 2019.
- Pedroza E., Ortiz J. y Martínez F.** (2007). “Historia del Teorema de Bernoulli”. Acta Universitaria, vol. 17, núm. 1, Universidad de Guanajuato, México, extraído de <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=41617103> en noviembre de 2018.
- Riaño F.** (2014). "El Nacimiento de la Hidrodinámica Teórica". Ingeniería Hidráulica y Ambiental, vol. 34, no. 2, pp. 66-78. ISSN 1815-591X, CIH, Instituto Superior Politécnico José Antonio Echeverría (Cujae), Habana.
- Riaño F.** (2016). “La hidráulica experimental durante el siglo XVIII en Francia”. Ingeniería Hidráulica y ambiental, vol. 37, no.3, p, 113 – 126. ISSN 1815-591X, CIH, Instituto Superior Politécnico José Antonio Echeverría (Cujae), Habana.
- Roca A.** (2003). “Sociedades y academias científicas: ¿estrategias sociales o elitismo?”. Dialnet, Universidad de La Rioja, España, extraído de <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=806470> en diciembre de 2018.
- Rouse H. and Ince S.** (1957). “History of Hydraulics”. Iowa Institute of Hydraulic Research. State University of Iowa. Iowa. USA.
- Sánchez C. y Valdés C.** (2014). “Daniel Bernoulli 1700 – 1782”, en DivulgaMat, Centro virtual de divulgación de las matemáticas, Universidad de la Habana, Cuba, extraído de <http://virtual.uptc.edu.co/ova/estadistica/docs/autores/pag/mat/DBernoulli.asp.htm> en diciembre de 2018.
- Thieren J.** (2017). “De la medición directa de la presión al esfigmomanómetro”. Sociedad Argentina de Cardiología, Buenos Aires, Argentina, extraído de <https://www.sac.org.ar/el-corazon-y-la-cultura/de-la-medicion-directa-de-la-presion-arterial-al-esfigmomanometro-dos-siglos> en enero de 2019.
- Velazco J.** (2007). “Daniel Bernoulli y Leonardo Euler o el encuentro de dos formas de ver la matemática”. Miscelánea Matemática, 45, México, extraído de [www.misclaneamatematica.org/Misc45/Jorge\\_V.pdf](http://www.misclaneamatematica.org/Misc45/Jorge_V.pdf) en noviembre de 2018.