

Validación de las expresiones para el flujo radial hacia un pozo en un acuífero libre

Juan David Rincón Vanegas

Profesional independiente

E-MAIL: juandrinconv@gmail.com

RESUMEN

La solución de la ecuación diferencial que representa el flujo radial hacia un pozo en un acuífero libre en régimen permanente y no lineal fue propuesta en un principio por Pérez Franco según la ley binómica de flujo que, al no ser integrada en cuadraturas, dicho autor plantea una solución basada en consideraciones físicas que fue verificada en la práctica con resultados apropiados. Por otro lado, Bravo Castellero obtuvo dos soluciones, la primera que coincide con los resultados obtenidos por Pérez Franco y; la segunda, realizando una aproximación asintótica mediante el método de perturbaciones regulares. Ahora bien, el autor con anterioridad propuso una solución basándose en los trabajos de Huyakorn y Dudgeon, por lo cual, resulta necesario validar las soluciones obtenidas aproximando la ecuación diferencial por Runge Kutta cuarto orden.

PALABRAS CLAVES: acuífero libre, estructuras de captación, flujo lineal, flujo no lineal, hidráulica de pozos

Validation of expressions for radial flow into a well in a free aquifer

ABSTRACT

The solution of the differential equation that represents the radial flow towards a well in a free aquifer in a permanent and nonlinear regime was initially proposed by Pérez Franco according to the binomial flow law which, not being integrated in quadratures, the author proposes a solution based on physical considerations that was verified in practice with appropriate results. On the other hand, Bravo Castellero obtained two solutions, the first one coinciding with the results obtained by Pérez Franco and the second one, making an asymptotic approximation by means of the method of regular perturbations. However, the author previously proposed a solution based on the works of Huyakorn and Dudgeon, therefore, it is necessary to validate the solutions obtained by approximating the differential equation by Runge Kutta fourth order.

KEYWORDS: free aquifer, catchment structures, linear flow, nonlinear flow, well hydraulics

01 INTRODUCCIÓN

La ecuación diferencial obtenida por Pérez Franco (1982), que modela el flujo no lineal permanente en los acuíferos libres no había sido integrada en cuadraturas para su momento, ya que dicha ecuación no tiene solución analítica exacta, por lo tanto, hace algún tiempo Bravo Castellero (1993) integró en cuadraturas dicha ecuación, introduciendo una nueva relación y obteniendo dos soluciones utilizando métodos numéricos.

La primera solución la obtuvo mediante el método de aproximaciones sucesivas donde el primer término de la sucesión de funciones de Picard coincide con la solución propuesta en un principio por Pérez Franco (1982), la segunda solución fue obtenida mediante una aproximación asintótica basado en el método de perturbaciones regulares en relación con un parámetro pequeño.

Ahora bien, Bravo Castellero (1993, 1994), realiza diversos juegos de datos y concluye que la solución dada por la aproximación asintótica resulta bastante similar a la solución propuesta en un principio por Pérez Franco, sin embargo, Bravo Castellero recomienda utilizar la aproximación asintótica; debido a que garantiza errores del orden ϵ^2 y ϵ , ya que al utilizar la solución propuesta por Pérez Franco es difícil acotar y precisar el error que se comete, asimismo, dicho error será menor en los casos en que ϵ y δ se aproximen a cero, según la propuesta de Pérez Franco.

Por otro lado, el autor en un trabajo anterior (2022), obtuvo una solución analítica apoyada en los trabajos de Huyakorn y Dudgeon (1976), no obstante, resulta necesario validar las diferentes expresiones obtenidas, solucionando por el método de Runge Kutta cuarto orden la ecuación diferencial ordinaria obtenida por Pérez Franco.

02 ECUACIONES DERIVADAS PARA LOS ACUÍFEROS LIBRES EN RÉGIMEN NO LINEAL

Antes que nada, no es ocioso mencionar y recordar las diversas restricciones impuestas por diversos investigadores al analizar el flujo radial hacia un pozo en un acuífero libre. Por consiguiente; para un acuífero libre, Pérez Franco (1982) obtuvo la siguiente formulación:

$$\frac{dh}{dr} = \frac{a}{r \cdot h} + \frac{b}{(r \cdot h)^2} \quad (1)$$

Ahora bien, Bravo Castellero (1993) propuso las siguientes transformaciones:

$$a = \frac{Q}{2\pi K_D} \quad ; \quad b = \left(\frac{Q}{2\pi K_T} \right)^2$$

$$h = h_o \cdot H \quad ; \quad r = r_o \cdot R \quad (2)$$

Por consiguiente, se obtiene la siguiente expresión adimensional para la ecuación (1):

$$\frac{dH}{dR} = \frac{\delta}{R \cdot H} + \frac{\epsilon}{(R \cdot H)^2} \quad (3)$$

donde:

$$\delta = \frac{a}{h_o^2} \quad ; \quad \epsilon = \frac{b}{r_o \cdot h_o^3}$$

Ahora, según las formulaciones obtenidas respectivamente por Pérez Franco (1982), Bravo Castellero (1993) y Rincón (2022), se tiene que:

$$h_{(r)} = h_o - \frac{a}{h_o} \cdot \ln\left(\frac{r_o}{r}\right) - \frac{b}{h_o^2} \cdot \left(\frac{r_o-r}{r_o \cdot r}\right) \quad (4)$$

$$h_{(r)} = \frac{h_o}{1 - \frac{a}{h_o^2} \ln\left(\frac{r}{r_o}\right) - \frac{b}{r_o \cdot h_o^3} \left(\frac{r-r_o}{r}\right)} \quad (5)$$

$$h_{(r)} = h_o - \frac{2a}{h_o + h_{(r)}} \cdot \ln\left(\frac{r_o}{r}\right) - \frac{3b}{h_o^2 + h_o \cdot h_{(r)} + h_{(r)}^2} \cdot \left(\frac{r_o-r}{r_o \cdot r}\right) \quad (6)$$

Pero, si se ajustan las formulaciones anteriores respectivamente, teniendo en cuenta las relaciones dadas en la ecuación (2), se obtiene que:

$$H_{(R)} = 1 + \delta \cdot \ln(R) - \varepsilon \cdot \left(\frac{1-R}{R}\right) \quad (7)$$

$$H_{(R)} = \frac{1}{1 - \delta \cdot \ln(R) - \varepsilon \cdot \left(\frac{R-1}{R}\right)} \quad (8)$$

$$H_{(R)} = 1 + \left(\frac{2}{1+H_{(R)}}\right) \cdot \delta \cdot \ln(R) + \left(\frac{3}{H_{(R)}^2 + H_{(R)} + 1}\right) \cdot -\varepsilon \cdot \left(\frac{1-R}{R}\right) \quad (9)$$

donde:

Q : caudal de bombeo.

h_o : espesor inicial del acuífero.

$h_{(r)}$: espesor del acuífero a la distancia radial r .

r_o : radio de influencia.

r : distancia en la cual se evalúa $h_{(r)}$.

K_D : conductividad hidráulica lineal.

K_T : conductividad hidráulica turbulenta.

03 VALIDACIÓN DE LAS EXPRESIONES OBTENIDAS

Antes que todo, resulta importante analizar las transformaciones realizadas por Bravo Castellero (1993) que condujeron a la ecuación (3). Si se realiza un análisis somero a los términos a y b , se puede concluir con bastante facilidad que $b > a$ y; por deducción, $\varepsilon < \delta$. Ahora, la simulación de la ecuación (3) mediante el método numérico de Runge Kutta cuarto orden se realizó con Macros de Excel y Python, por consiguiente, se realizaron un grupo de simulaciones cuyos parámetros se resumen en la tabla 1.

Tabla 1. Parámetros de la simulación

Parámetros de entrada	Simulación						
	1	2	3	4	5	6	7
h	50	50	50	200	200	200	1000
a	1	1	1	1	1	1	1
b	50	50	50	2	2	50	50
δ	0,027777778	0,111111111	0,0025	0,04	0,000369822	0,000816327	0,000452694
ε	0,023148148	0,185185185	0,0000625	0,001066667	5,68958 x10 ⁻⁸	9,71817x10 ⁻⁶	1,20397x10 ⁻⁶
h_o (m)	6	3	20	5	52	35	47
r_o (m)	10	10	100	15	250	120	400

Las figuras de la 1 a la 7 muestran los resultados de las simulaciones realizadas

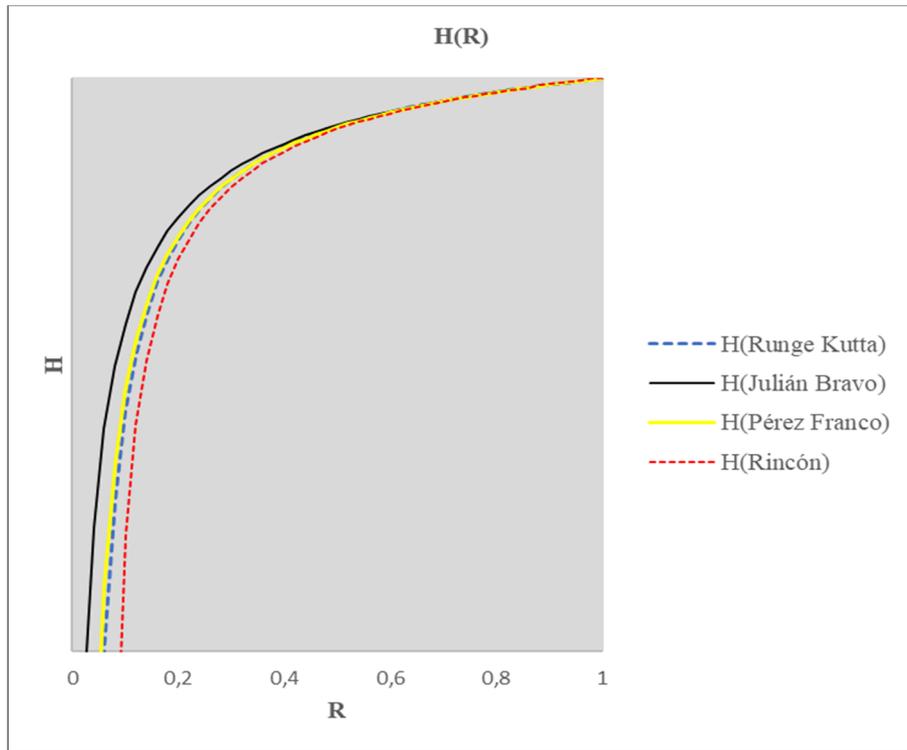


Figura 1. Simulación 1

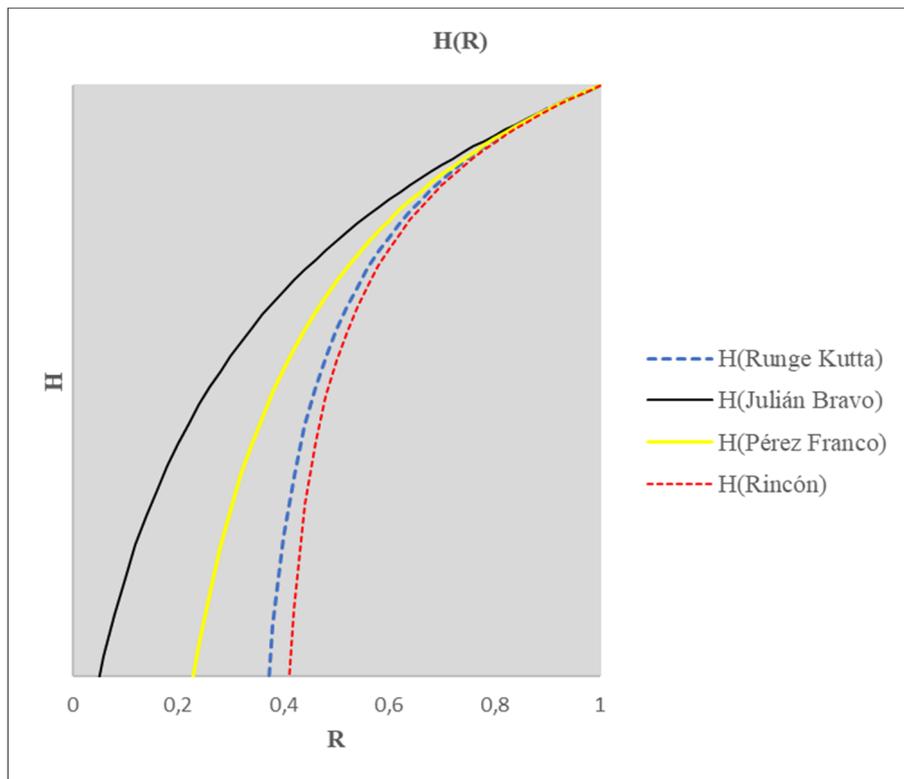


Figura 2. Simulación 2

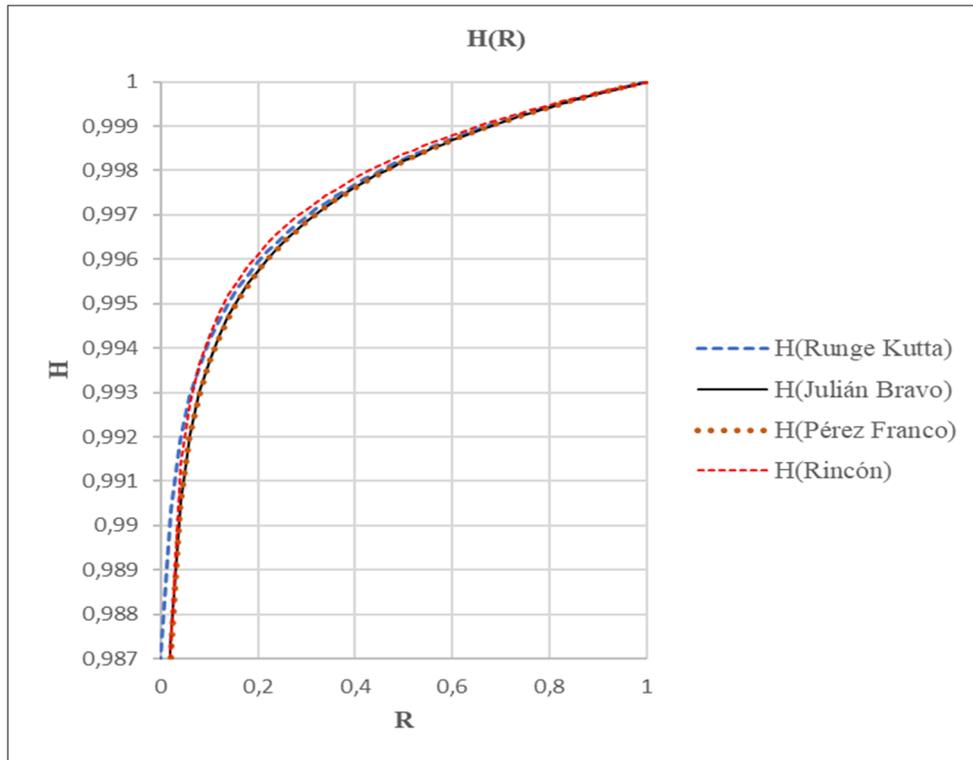


Figura 3. Simulación 3

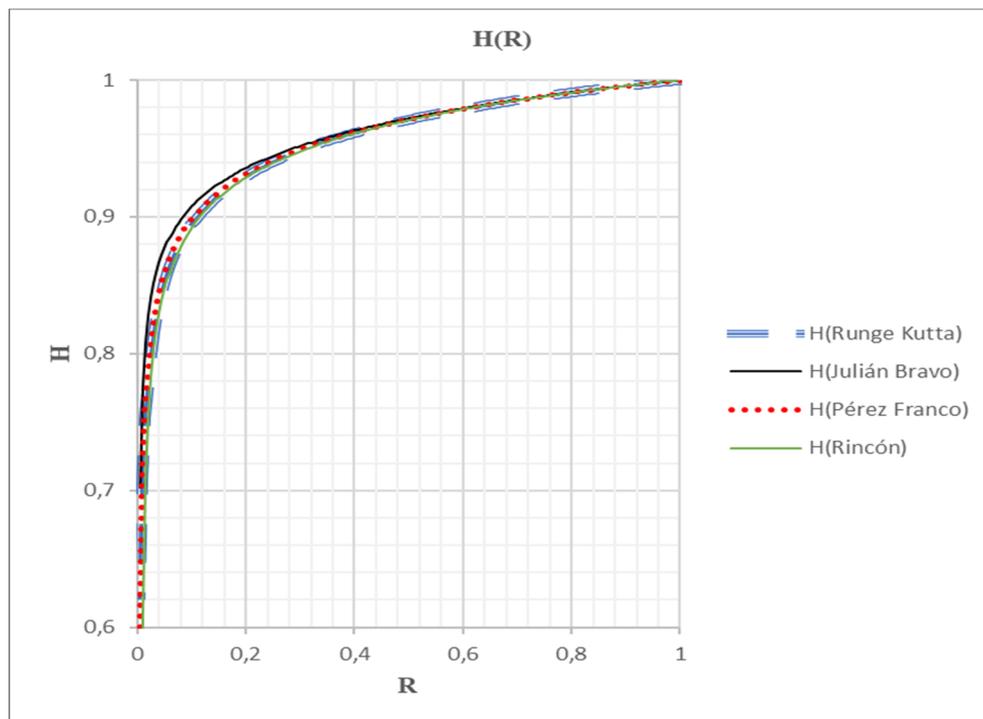


Figura 4. Simulación 4

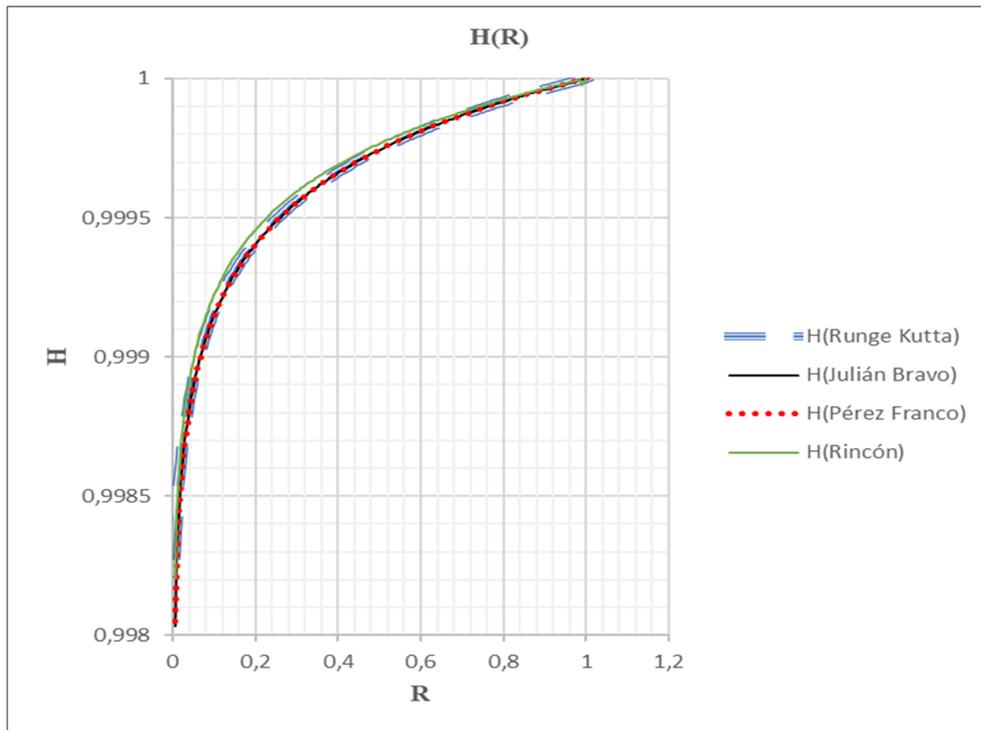


Figura 5. Simulación (5)

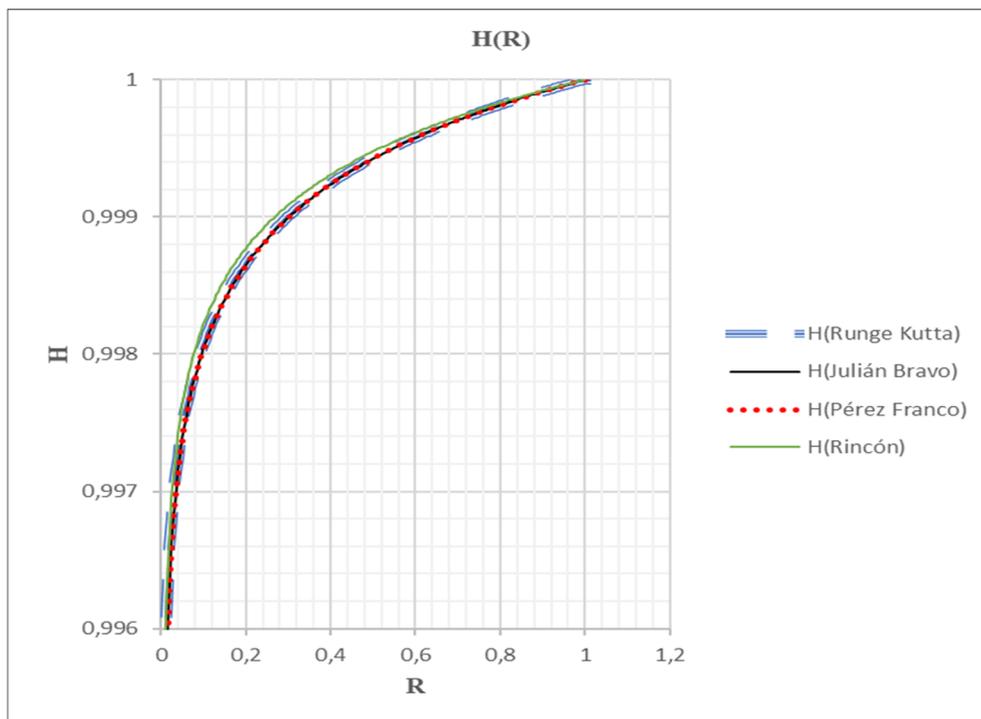


Figura 6. Simulación (6)

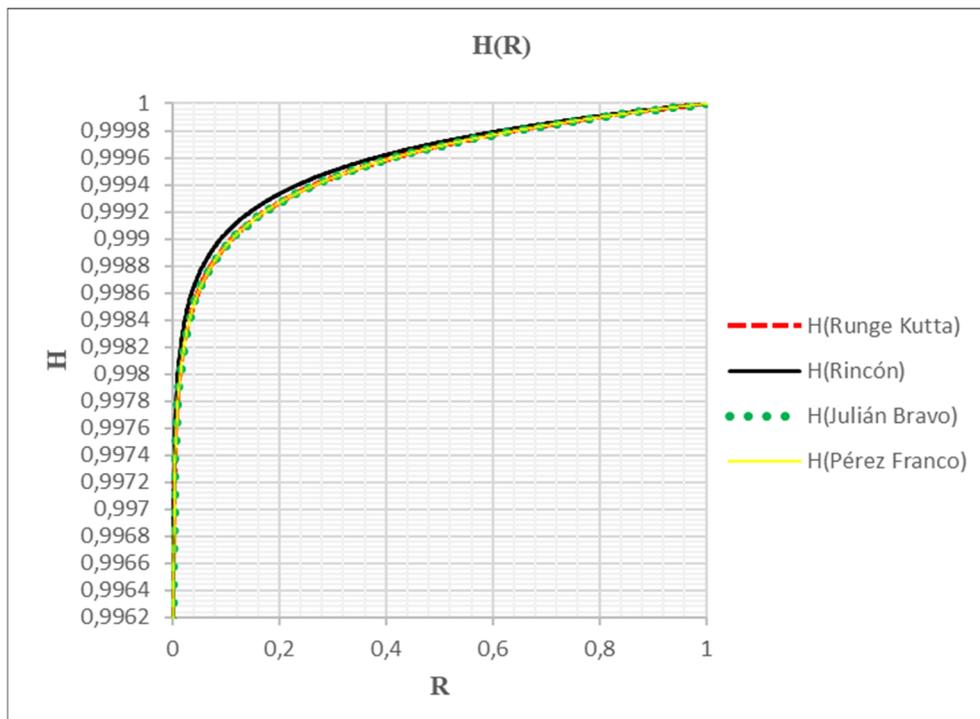


Figura 7. Simulación (7)

04 RESULTADOS Y OBSERVACIONES GENERALES

Para empezar, si se realiza un análisis somero a los resultados obtenidos en las figuras (1 y 2), se podría deducir que las expresiones obtenidas por Pérez Franco (7) y Bravo Castellero (8), se alejan de la solución real obtenida por Runge Kutta para $h = 50$, por consiguiente, se podría concluir que la solución propuesta por el autor (9), obtiene una mejor aproximación a la solución real cuando los valores de h_o y r_o son pequeños.

No obstante, realizando un juego riguroso de datos; alguno de ellos expresado en la figura (4) cuando h_o y r_o son pequeños, se concluyó que la formulación (9) es más precisa que las demás para $b \approx a$, condición que en la práctica resultaría improbable o quizás imposible. Además, manteniendo dicha relación anterior y aumentando los valores de h_o y r_o (figura 5), se puede llegar prácticamente al mismo resultado conceptual obtenido en las figuras (3, 6 y 7).

En este orden de ideas, para los resultados obtenidos por la ecuación (9); cuando h_o y r_o son pequeños, se genera un intervalo en las ordenadas para el cual la función no tendrá una solución real, por tanto, a medida que b se aproxime al valor de a , el intervalo de la función $H_{(R)}$ donde adquiere valores imaginarios se reducirá considerablemente y tenderá a intervalos infinitesimales próximos a cero. De hecho, el caso anterior se observa de la misma manera aun cuando $b > a$, resultados que se pueden apreciar en las figuras (1 y 2), donde no fue posible conseguir resultados completos debido al intervalo mayor generado que no pertenece a valores reales de la función $H_{(R)}$.

De otro modo, al aumentar en pequeñas proporciones h_o y r_o , partiendo de $h_o = 1$ y $r_o = 1$, para $b \approx a$, tanto para solución numérica como para las demás expresiones, ambas resultan bastante idénticas, pero cuando h_o y r_o adquieren valores altos ya no se ajusta la formulación (9) a las expresiones (7 y 8) y; por ende, a la solución numérica (ver figuras 4 y 5).

Ahora bien, al establecer valores acordes para a y b ($b > a$) y valores promedio en relación con las características típicas de los acuíferos libres (ver tabla 1); para realizar las simulaciones 3, 6 y 7 con

diferentes valores de paso $h(50, 200, 1000)$ para la solución numérica, se obtuvo los siguientes resultados expresados en las figuras (3, 6 y 7), los cuales guardan bastante similitud. Asimismo, se pudo corroborar teniendo en cuenta las figuras (1, 2 y 4), que la formulación propuesta por Bravo Castellero (1993, 1994) es más precisa a medida que ε sea más pequeño; condición que satisface las condiciones en la realidad, por lo tanto, las ventajas de la aproximación asintótica son indiscutibles debido a la comodidad y precisión de esta.

Por lo tanto, realizando un análisis a los resultados obtenidos y expresados en las figuras anteriormente mencionadas (3, 6 y 7), se puede deducir con facilidad que las expresiones propuestas por Pérez Franco (7) y Bravo Castellero (8) resultan bastante idénticas, corroborando una de las conclusiones a las cuales llegó Bravo Castellero (1993, 1994) en su momento, al comparar los resultados numéricos de ambas ecuaciones obtenidas.

Es importante mencionar; realizando diversos juegos de datos, que la propuesta de Pérez Franco se ajusta mejor a la solución numérica para valores pequeños de h_o y r_o , por el contrario, para valores relativamente promedio o altos de r_o y valores pequeños o altos para h_o , las formulaciones obtenidas por Pérez Franco (7) y Bravo Castellero (8) resultan similares. Sin embargo, a pesar de los resultados anteriores ambas formulaciones son similares, conclusión misma a la que llegó Bravo Castellero (1994).

Ahora, en relación con la formulación obtenida por el autor (9), existe una desviación levemente pronunciada que difiere de la solución obtenida por la solución numérica, sin embargo, se ajusta satisfactoriamente como una aproximación menos precisa a las soluciones propuestas por los autores mencionados y, por ende, a la solución real.

Por último, con el fin de identificar la inconsistencia en el intervalo observado en la expresión (9) hacia la solución numérica y las expresiones obtenidas por los autores mencionados, si se examinan las ecuaciones (7) y (9), se puede deducir que:

$$H_{(R)} = 1 + \delta \cdot \ln(R) - \varepsilon \cdot \left(\frac{1-R}{R}\right) \quad (7)$$

$$H_{(R)} = 1 + \omega_D \cdot \delta \cdot \ln(R) + \omega_T \cdot -\varepsilon \cdot \left(\frac{1-R}{R}\right) \quad (9)$$

donde:

$$\omega_D = \left(\frac{2}{1 + H_{(R)}}\right) \quad ; \quad \omega_T = \left(\frac{3}{H_{(R)}^2 + H_{(R)} + 1}\right)$$

De hecho, se puede identificar con facilidad analizando las figuras (3, 5, 6 y 7) que los factores ω_D y ω_T tienen mayor incidencia a medida que R se acerca al cero por la izquierda, desviación que es observada sin dificultad en los resultados adquiridos.

05 CONCLUSIONES

Para empezar, ante las dificultades que presenta para ciertas condiciones específicas la ecuación propuesta con anterioridad por (Rincón, 2022), no se recomienda utilizar la expresión (9), aunque el error cometido para la componente lineal (ω_D) y turbulenta (ω_T) sea progresivo a medida que disminuye R , es decir, que el error máximo será del 200% y 300% respectivamente para $R=0$.

Por el contrario, ante las diversas ventajas de una aproximación asintótica por su comodidad y precisión, se recomienda utilizar la ecuación propuesta por Bravo Castillero (1993). Por lo demás, no se descarta en ningún momento la formulación obtenida por Pérez Franco (1982), teniendo en cuenta que se obtiene mayor precisión para valores pequeños de h_0 y r_0 que la ecuación propuesta por Bravo Castillero, no obstante, ambas ecuaciones se asemejan con bastante precisión a la solución numérica.

Finalmente, resulta necesario modificar la expresión obtenida en un trabajo anterior por Rincón (2022), con el fin de lograr mejores resultados con respecto a lo expuesto en dicho trabajo.

05 REFERENCIAS

Bravo Castillero, J. (1993). “Flujo radial hacia un pozo en acuífero libre”, Ingeniería Hidráulica, vol. 14, no.2, pp. 15–17, ISSN 2788-6050, Ciudad de la Habana, Cuba.

Bravo Castillero, J. (1994). “Nuevas fórmulas para el cálculo del flujo no lineal permanente en acuífero libre”, Ingeniería Hidráulica, vol. 15, no.1, pp. 21–27, ISSN 2788-6050, Ciudad de la Habana, Cuba.

Huyakorn P. and Dudgeon C. R. (1976). “Investigation of two-regime well flow”, Journal of Hydraulic Engineering, vol. 102, no. 9. pp. 1149-1165, ISSN (online): 2690-2524.

Pérez Franco D. (1982). “Hidráulica subterránea”, Editorial Científico – Técnica, Ciudad de la Habana, Cuba.

Rincón J. D. (2022). “Flujo no lineal permanente en acuíferos confinados y libres en presencia de desarrollo”, Ingeniería Hidráulica y Ambiental, vol. 43, no. 4, pp. 38–46, ISSN 2788-6050, Ciudad de la Habana, Cuba.

CONFLICTO DE INTERESES

Los autores declaran que no existe conflicto de intereses

CONTRIBUCIÓN DE LOS AUTORES

Juan David Rincón Vanegas [https:// orcid.org/0000-0001-9932-3253](https://orcid.org/0000-0001-9932-3253)

Es el único autor, por lo tanto, realizó el artículo en su totalidad.