Evaluación de algunas expresiones unificadas para el factor de fricción de Darcy-Weisbach

Juan Camilo Castro Velásquez E-MAIL: juan.castro-v@mail.escuelaing.edu.co
Departamento de Ingeniería Informática, Escuela Colombiana de Ingeniería Julio Garavito.

Sebastián Pérez Ocampo E-MAIL: sebastian.perezo@campusucc.edu.co
Facultad de Ingeniería Civil, Universidad Cooperativa de Colombia.

Juan David Rincón Vanegas E-MAIL: jurinconva@unal.edu.co
Departamento de Ingeniería Civil y Agrícola, Universidad Nacional de Colombia.

RESUMEN

En el diseño de conducciones para el transporte de fluidos se emplean diferentes ecuaciones para determinar el factor de fricción en régimen laminar y turbulento, ahora bien, es posible que existan variaciones importantes de los diferentes parámetros inmersos en el fenómeno físico, que cambien significativamente el régimen de flujo laminar hacia turbulento o viceversa. Por lo anterior, resulta práctico contar con expresiones unificadas que sean aplicables sin importar el patrón del flujo. En este orden de ideas, a través del tiempo algunos investigadores han propuesto formulaciones para tal fin, sin embargo, resulta totalmente necesario validar, sobre todo, las ecuaciones modernas, con el objetivo de establecer la precisión y, por consiguiente, la confiabilidad de los resultados que cada expresión proporciona.

PALABRAS CLAVES: factor de fricción de Darcy-Weisbach, flujo laminar, flujo turbulento, hidráulica de tuberías, mecánica de fluidos.

Evaluation of some unified expressions for the Darcy-Weisbach friction factor

ABSTRACT

In the design of pipelines for the transport of fluids, different equations are used to determine the friction factor in laminar and turbulent regimes. However, it is possible that there are important variations of the different parameters involved in the physical phenomenon, which significantly change the laminar flow regime to turbulent or vice versa. Therefore, it is practical to have unified expressions that are applicable regardless of the flow pattern. In this order of ideas, over time some researchers have proposed formulations for this purpose, however, it is absolutely necessary to validate, especially the modern equations, in order to establish the accuracy and, therefore, the reliability of the results that each expression provides.

KEYWORDS: Darcy-Weisbach friction factor, fluid mechanics, laminar flow, pipe hydraulics, turbulent flow.

CITMA CERTIFICADO

Marzo 2024-RECIBIDO APROBADO-Abril 2024

01 INTRODUCCIÓN

Para empezar, en el diseño de conducciones para el transporte de fluidos se emplean diferentes ecuaciones para establecer el factor de fricción en régimen laminar y turbulento, pero es posible que existan variaciones importantes de los diferentes parámetros inmersos en el fenómeno físico, que cambien significativamente el régimen de flujo laminar hacia turbulento (flujo hidráulicamente liso o rugoso) o viceversa.

Ahora bien, diversos investigadores han propuesto formulaciones que abarcan todos los regímenes de flujo, sin embargo, se desconoce, sobre todo en las expresiones más vanguardistas, la precisión y, por ende, la confiabilidad de estas.

No obstante, es importante destacar que Díaz-Damacillo et al. (2020) realizó la evaluación, según la expresión de Colebrook-White, de dos ecuaciones en cuestión relativamente modernas; la propuesta de Brkić and Praks (2018) y Díaz-Damacillo and Plascencia (2019). En efecto, los investigadores encontraron que, para algunos valores de ε entre el rango $10^2 \leq R_e \leq 10^9$, el error relativo máximo fue 10,02% y 9,83% de forma respectiva.

Por último y, ante cierta incertidumbre en relación con este tipo de formulaciones, en esta investigación se evaluarán las ecuaciones presentadas, por medio del algoritmo CPR hecho por los autores, con el objetivo de establecer la precisión y, por consiguiente, la confiabilidad de los resultados que cada expresión proporciona.

02 ECUACIONES UNIFICADAS PARA DETERMINAR EL FACTOR DE FRICCIÓN DE DARCY-WEISBACH

Antes que todo, no es ocioso recordar que el factor de fricción, en régimen laminar, se deriva de la ecuación de Hagen—Poiseuille y Darcy—Weisbach, por lo tanto, resulta que:

$$f = \frac{64}{R_e} \tag{1}$$

Por otro lado y, en un principio diseñada para determinar el factor de fricción en régimen transicional, se tiene la formulación de Colebrook—White (1939):

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \cdot \log_{10}\left(\frac{k_s}{3{,}7 \cdot d} + \frac{2{,}51}{R_e \cdot \sqrt{f}}\right) \tag{2}$$

donde: R_e, número de Reynolds.

f, factor de fricción de Darcy—Weisbach.

k_s, rugosidad absoluta de la tubería.

d, diámetro de la tubería.

$\varepsilon = k_s/d$, rugosidad relativa.

Por lo demás, cabe mencionar que la expresión (2) probó ser válida para todo tipo de flujo turbulento en tuberías; sin embargo, al ser esta una ecuación implícita para el factor de fricción implica la necesidad de utilizar algún método numérico para calcularlo (Saldarriaga 2016).

FORMULACIÓN DE CHURCHILL

Churchill (1977) desarrolló la siguiente formulación que, según el autor, es válida para todo número de Reynolds R_e, y rugosidad relativa ε.

$$f = 8 \cdot \left[\left(\frac{8}{R_e}\right)^{12} + \frac{1}{(A+B)^{3/2}}\right]^{1/12} \qquad (3)$$

donde:

$$A = \left[2{,}457 \cdot \ln\left(\frac{1}{\left(\frac{7}{R_e}\right)^{0{,}9} + 0{,}27 \cdot \varepsilon}\right)\right]^{16} \;\; ; \;\; B = \left(\frac{37530}{R_e}\right)^{16}$$

Es importante indicar, que la parte turbulenta de la expresión (3) se basa en la aproximación hecha por Churchill para la ecuación de Colebrook—White (Churchill 1973).

FORMULACIÓN DE SWAMEE

Swamee (1993) planteó la siguiente expresión:

$$f = \left\{\left(\frac{64}{R_e}\right)^{8} + 9{,}5 \cdot \left[\ln\left(\frac{\varepsilon}{3{,}7} + \frac{5{,}74}{{R_e}^{0{,}9}}\right) - \left(\frac{2500}{R_e}\right)^{6}\right]^{-16}\right\}^{0{,}125} \qquad (4)$$

Ahora bien, cabe resaltar que el autor no define explícitamente el rango de aplicación para la expresión (4), sin embargo, el autor evalúa la ecuación anterior en los intervalos dados por el diagrama de Moody (1944), por consiguiente, se puede deducir que dicha formulación es válida para todo el rango del diagrama mencionado.

Por lo demás, no es ocioso señalar que la expresión (4) considera la aproximación de Swamee y Jain (1976) para la ecuación de Colebrook—White.

FORMULACIÓN DE CHENG

Cheng (2008) estableció la siguiente ecuación:

$$\frac{1}{f} = \left(\frac{R_e}{64}\right)^{\alpha} \cdot \left[1{,}8 \cdot \log_{10}\left(\frac{R_e}{6{,}8}\right)\right]^{2\cdot(1-\alpha)\cdot\beta} \left[2 \cdot \log_{10}\left(\frac{3{,}7}{\varepsilon}\right)\right]^{2\cdot(1-\alpha)\cdot(1-\beta)} \qquad (5)$$

donde:

$$\alpha = \frac{1}{1 + \left(\frac{R_e}{R_{e_{LT}}}\right)^{m}} \;\; ; \;\; R_{e_{LT}} = 2720 \;\; ; \;\; m = 9 \;\; ; \;\; \beta = \frac{1}{1 + \left(\frac{R_e}{R_{e_{SR}}}\right)^{n}} \;\; ; \;\; R_{e_{SR}} = \frac{\eta \cdot d}{k_s}$$

$$\eta = 320 \;\; ; \;\; n = 2$$

Es relevante anotar, que la expresión anterior sigue los resultados obtenidos por el experimento de Nikuradse (1950).

FORMULACIÓN PRÁCTICA DE LA INGENIERÍA RUSA

A. Chernikin y B. Chernikin (2012), desarrollaron la siguiente formulación:

$$f = 0{,}11 \cdot \left(\frac{\alpha + \varepsilon + X^{1{,}4}}{115 \cdot X + 1}\right)^{0{,}25} \tag{6}$$

donde:

$$\alpha = \frac{68}{R_e} \; ; \; X = (28 \cdot \alpha)^{10}$$

Ahora, cabe aclarar que la parte turbulenta de la formulación (6) se basa en una expresión hecha en 1982 por un investigador ruso, de hecho, dicha ecuación se usa comúnmente en Rusia en lugar de la formulación de Colebrook—White, cuando se diseñan y operan redes para el transporte de petróleo crudo (A. Chernikin and B. Chernikin 2012).

Por último y, con respecto a la incertidumbre del rango de aplicación para la expresión (6), Brkić and Praks (2018) corroboraron que, para valores pequeños de rugosidad relativa entre $10^{3{,}7} \leq R_e \leq 10^{5{,}8}$, las ecuaciones (2 y 6) producen resultados casi idénticos, no obstante, a medida que el valor de la rugosidad relativa aumenta el resultado obtenido por la formulación (6) se aleja del adquirido por Colebrook—White (expresión 2), situación que, según Brkić and Praks (2018), es cuestionable.

FORMULACIÓN DE BRKIĆ Y PRAKS

Brkić and Praks (2018), propusieron la siguiente ecuación que, infiriendo por sus resultados obtenidos, es válida para todo el rango del diagrama de Moody (1944).

$$f = \frac{64}{R_e} \cdot (1 - y_1) + \frac{0{,}316}{{R_e}^{0{,}25}} \cdot (y_1 - y_3) + \frac{0{,}25}{\log^2{}_{10}\left(\frac{\varepsilon}{3{,}71}\right)} \cdot y_2 \tag{7}$$

donde:

$$y_1 = 1 - \frac{1048}{\frac{4{,}489}{10^{20}} \cdot {R_e}^6 \cdot \left(0{,}148 \cdot R_e - \frac{2{,}306 \cdot R_e}{0{,}003133 \cdot R_e + 9{,}646}\right) + 1050}$$

$$y_2 = 1{,}012 - \frac{1}{0{,}02521 \cdot R_e \cdot \varepsilon + 2{,}202}$$

$$y_3 = 1 - \frac{1}{0{,}000389 \cdot {R_e}^2 \cdot \varepsilon^2 + 0{,}0000239 \cdot R_e + 1{,}61}$$

Para acabar, cabe subrayar que la formulación (7) considera el comportamiento flexional de Nikuradse (1950).

FORMULACIÓN DE DÍAZ—DAMACILLO Y PLASCENCIA

Díaz—Damacillo and Plascencia (2019), plantearon una expresión que, un tiempo más tarde, fue modificada por Díaz—Damacillo et al. (2020). La formulación actualizada que, según los autores es aplicable para una amplia gama de valores de R_e y ε (Díaz—Damacillo et al. 2020), viene dada por:

$$f = \frac{64}{R_e} + \frac{\lambda_1}{1 + e^{\left(\frac{\tau_1 - R_e}{100}\right)}} + \frac{\lambda_2}{1 + e^{\left(\frac{\tau_2 - R_e}{150} \cdot \varepsilon\right)}} \tag{8}$$

donde:

$$\lambda_1 = 0{,}02 \;\; ; \;\; \tau_1 = 3000 \;\; ; \;\; \lambda_2 = \left| \lambda_1 - \left[\frac{1}{-2 \cdot \log_{10}\left(\frac{1}{3{,}71} \cdot \varepsilon\right)} \right]^2 \right|$$

$$\tau_2 = \frac{0{,}77505}{\varepsilon^2} - \frac{10{,}984}{\varepsilon} + 7953{,}8$$

Por lo demás, cabe resaltar que la ecuación (8) sigue la conducta flexional de Nikuradse (1950).

FORMULACIÓN DE AVCI Y KARAGOZ

Avci y Karagoz (2019), desarrollaron la siguiente formulación que, infiriendo por sus resultados adquiridos, es válida para todo el rango del gráfico de Moody (1944).

$$f = f_t + \left(\frac{64}{R_e} - f_t\right) \cdot e^{-\left(\frac{C_m \cdot R_e}{2560}\right)^8} \tag{9}$$

donde:

$$C_m = 1 + \varepsilon + \frac{\varepsilon \cdot \sqrt{\varepsilon}}{1 + 225 \cdot \varepsilon^3} + 500 \cdot \varepsilon^4$$

Ahora bien, es significativo señalar que la función f_t hace referencia al factor de fricción calculado en régimen turbulento, por ende y, según el trabajo realizado por Avci y Karagoz (2009), dicho factor resulta que:

$$f_t = \frac{6{,}4}{\left\{ \ln\left[\frac{1}{R_e} + 0{,}01 \cdot \varepsilon \cdot \left(1 + \frac{10 \cdot \sqrt{\varepsilon}}{1 + 225 \cdot \varepsilon^2} + 5000 \cdot \varepsilon^3\right)\right]\right\}^{2{,}4}}$$

Para terminar, es crucial anotar que la expresión (9) prosigue el comportamiento monotónico de Colebrook—White.

VARIANTE PARA LA FORMULACIÓN DE AVCI Y KARAGOZ

Milošević et al. (2022), introdujeron la ecuación que recomienda Brkić and Praks (2020) para el factor de fricción en régimen turbulento f_t, que se encuentra inmerso en la función general obtenida por Avci y Karagoz (2019). En este orden de ideas, la formulación resultante es la siguiente.

$$f = f_t + \left(\frac{64}{R_e} - f_t\right) e^{-\left(\frac{C_m \cdot R_e}{2560}\right)^8} \tag{10}$$

donde:

$$\frac{1}{\sqrt{f_t}} = 0{,}8685972 \cdot \left(B - C + \frac{C}{x - 0{,}5588 \cdot C + 1{,}2079}\right) \;\; ; \;\; A = \frac{R_e \cdot \varepsilon}{8{,}0897}$$

$$B = \ln(R_e) - 0{,}779626 \;\; ; \;\; C = \ln(x) \;\; ; \;\; x = A + B$$

Para finalizar, es notable aludir que la función f_t puede ser cualquier propuesta coherente que se haya realizado a través del tiempo.

FORMULACIÓN DE MILOŠEVIĆ, BRKIĆ, PRAKS, LITRIČIN Y STAJIĆ

Milošević et al. (2022), reportan la siguiente formulación que fue desarrollada mediante regresión simbólica.

$$f = \frac{61{,}395}{R_e} + \frac{0{,}024444 + 0{,}60915 \cdot \varepsilon}{e^{\left(\frac{8188400}{{R_e}^2}\right)}} \tag{11}$$

Ahora bien, es fundamental indicar que la expresión (11) fue evaluada para una rugosidad relativa de 0,05 entre el rango $0 \leq R_e \leq 10^{3{,}78}$, obteniendo resultados similares a los conseguidos por la ecuación (7).

En suma, cabe acentuar que la formulación (11) sigue la conducta flexional de Nikuradse (1950), aunado a ello, es relevante señalar que, según el conocimiento actual de los autores, la expresión (11), de acuerdo con la temática correspondiente, es la más contemporánea.

03 ALGORITMO CPR

Para iniciar, el algoritmo CPR, desarrollado por los autores, es una herramienta programada en el lenguaje Python (versión 3.11 o 3.12), cuyo objetivo es evaluar los resultados obtenidos por las ecuaciones aproximadas, en relación con las formulaciones (1 y 2). En este orden de ideas, los autores disponen a los interesados el algoritmo en un repositorio de GitHub (https://github.com/BlutLucifugeKrieger/CPR-Algorithm), con el fin de satisfacer cualquier tipo de exigencia académica u ocupacional.

Por lo demás, a continuación, dejando un poco de lado la programación a fondo del CPR, se resumen las características más importantes en las cuales se basa este; sin embargo, si el lector desea profundizar en la programación o realizar algún cambio se recomienda clonar el algoritmo que se encuentra en el repositorio mencionado.

RANGO EVALUADO PARA EL NÚMERO DE REYNOLDS Y LA RUGOSIDAD RELATIVA

Las condiciones adoptadas para el régimen laminar, transicional y turbulento se establecieron en $R_e \leq 2000, 2000 < R_e < 4000$, y $R_e \geq 4000$ respectivamente (Moody 1944), por ende, el intervalo evaluado para R_e, en flujo laminar y turbulento, fue $10^{-10} \leq R_e \leq 2000$ y $4000 \leq R_e \leq 10^8$ correlativamente, por otra parte, el rango evaluado para la rugosidad relativa fue $10^{-10} \leq \varepsilon \leq 0{,}05$; no obstante, el usuario podrá seleccionar el rango que desee en el CPR, aunque los autores recomiendan que el límite inferior no sea igual a cero, ya que dicho punto es problemático.

DISTRIBUCIÓN DE LA MUESTRA (PUNTOS CUASI ALEATORIOS DE SOBOL)

El método de Sobol cuasi−Monte Carlo llena el espacio de posibilidades de manera más uniforme en el rango de una muestra, por ende, los números de Sobol generados ofrecen una menor discrepancia entre sí, lo cual hace que se obtengan puntos que abarquen eficientemente el intervalo de una muestra (Brkić and Praks 2022).

En este sentido, las secuencias de Sobol proporcionan $n = 2^m$ puntos en el intervalo $[0, 1)^d$, donde d es la dimensionalidad de la secuencia. Por otro lado, es importante resaltar que Brkić and Praks (2022) concluyeron que, con $m = 6$, es suficiente para obtener resultados aceptables sin necesidad de evaluar las infinitas posibilidades.

Por lo anterior, para el desarrollo específico de este trabajo los autores eligieron un $m = 10$, es decir, 1024 puntos para el intervalo del número de Reynolds y la rugosidad relativa, de hecho, el índice total de los vectores resultantes, conforme a la cantidad de puntos de R_e y ε, es 1024^2. No obstante, el usuario puede seleccionar un valor diferente para m, según las necesidades que este requiera, pero sin que m sea mayor que trece, ya que para valores más grandes se debe disponer de un equipo de gran capacidad computacional y, aunado a ello, se tendrá que modificar un parámetro denominado "bits", que hace parte del instrumento que se describe próximamente.

Ahora bien, el método mencionado es un procedimiento complejo que requiere una herramienta computacional. En este orden de ideas, en Python existe un motor denominado Sobol, que hace parte del sub-módulo cuasi—Monte Carlo de la librería SciPy de código abierto, por lo tanto, los autores implementaron dicho motor en este trabajo.

En otro sentido, cabe destacar que actualmente en el motor Sobol existen dos métodos de optimización para mejorar la calidad de la muestra; "random-cd" y "lloyd", por ende, los autores utilizaron ambas metodologías, no obstante, el usuario definirá si desea o no implementar algún método mencionado.

Para terminar, si el lector requiere saber cómo usar el motor de Sobol o conocer más sobre este se recomienda acceder a la documentación de dicho sub-módulo (The SciPy Community 2023).

DESARROLLO DE LA ECUACIÓN DE COLEBROOK—WHITE

El método numérico utilizado por los autores para solucionar la ecuación de Colebrook—White fue el de Newton—Raphson, el cual, por lo general, sólo requiere tres iteraciones para que el método converja (Saldarriaga 2016), de hecho, Brkić (2011) afirma que normalmente se necesita menos de siete iteraciones.

En este sentido y, para el desarrollo de este trabajo, los autores eligieron siete iteraciones para el método mencionado.

CUANTIFICACIÓN DEL ERROR RELATIVO

Para comenzar, es importante señalar que los valores obtenidos para el error relativo se programaron en cada régimen de flujo (laminar y turbulento), es decir, se caracterizó ambas zonas, con el fin de identificar exclusivamente el error en el régimen dado.

Por lo anterior, las fórmulas programadas para cuantificar el error mencionado son las siguientes:

$$L_{RE}(\%) = 100 \cdot \left(\frac{f_{\text{Hagen−Poiseuille}} - f_{aproximación}}{f_{\text{Hagen−Poiseuille}}}\right)$$

$$T_{RE}(\%) = 100 \cdot \left(\frac{f_{Colebrook-White} - f_{aproximación}}{f_{Colebrook-White}}\right)$$

donde: L_{RE}, error relativo mínimo, promedio o máximo en régimen laminar.

T_{RE}, error relativo mínimo, promedio o máximo en régimen turbulento.

Finalmente, es indispensable aclarar que el error relativo promedio no es obtenido por el promedio entre el error relativo mínimo y máximo, sino que dicho error se adquiere como el promedio de toda la cantidad de datos que pueden existir en el vector del error relativo, siguiendo el régimen de flujo correspondiente.

04 RESULTADOS

Antes que nada, es pertinente resaltar que en los siguientes resultados se obtuvo un mayor número de decimales, pero, por practicidad, los autores sólo consideraron tres decimales truncados para cada uno de ellos.

A continuación, se presentan las tablas (1, 2 y 3), donde se exponen los resultados adquiridos por el algoritmo CPR para cada modelo, de hecho, se resaltan las formulaciones con mejores resultados.

Tabla 1. Error relativo de las ecuaciones evaluadas para régimen laminar y turbulento (muestreo tipo Sobol)

Autor y ecuación	Régimen de flujo					
	Laminar			Turbulento		
	L_{RE} mínimo	L_{RE} promedio	L_{RE} máximo	T_{RE} mínimo	T_{RE} promedio	T_{RE} máximo
Churchill (3)	0,000	0,003	0,131	4,543E-07	0,058	3,103
Swamee (4)	0,000	0,005	0,598	1,919E-08	0,033	1,401
Cheng (5)	0,000	0,242	2,909	3,243E-04	0,064	40,534
A. Chernikin y B. Chernikin (6)	5,589E-07	0,196	3,457	3,575E-04	16,217	46,818
Brkić y Praks (7)	5,852E-06	14,057	58,378	1,192E-04	1,169	86,337
Díaz—Damacillo et al. (8)	0,000	8,956	25,276	2,074E-06	1,160	236,639
Avci y Karagoz (9)	0,000	1,628	30,425	2,765E-05	0,967	3,106
Brkić y Praks (10)	0,000	1,745	31,435	1,175E-04	0,103	0,124
Marko Milošević et al. (11)	3,060E-05	3,986	17,958	1,302E-03	22,890	311,438

Tabla 2. Error relativo de las ecuaciones evaluadas para régimen laminar y turbulento (muestreo tipo Sobol—optimización por “random-cd”)

Autor y ecuación	Régimen de flujo					
	Laminar			Turbulento		
	L_{RE} mínimo	L_{RE} promedio	L_{RE} máximo	T_{RE} mínimo	T_{RE} promedio	T_{RE} máximo
Churchill (3)	0,000	0,003	0,131	4,543E-07	0,058	3,103
Swamee (4)	0,000	0,005	0,598	1,919E-08	0,033	1,401
Cheng (5)	0,000	0,242	2,909	3,243E-04	0,064	40,534
A. Chernikin y B. Chernikin (6)	5,589E-07	0,196	3,457	3,575E-04	16,217	46,818
Brkić y Praks (7)	5,852E-06	14,057	58,378	1,192E-04	1,169	86,337
Díaz—Damacillo et al. (8)	0,000	8,956	25,276	2,074E-06	1,160	236,639
Avci y Karagoz (9)	0,000	1,628	30,425	2,765E-05	0,967	3,106
Brkić y Praks (10)	0,000	1,745	31,435	1,175E-04	0,103	0,124
Marko Milošević et al. (11)	3,060E-05	3,986	17,958	1,302E-03	22,890	311,438

Tabla 3. Error relativo de las ecuaciones evaluadas para régimen laminar y turbulento (muestreo tipo Sobol—optimización por “lloyd”)

Autor y ecuación	Régimen de flujo					
	Laminar			Turbulento		
	L_{RE} mínimo	L_{RE} promedio	L_{RE} máximo	T_{RE} mínimo	T_{RE} promedio	T_{RE} máximo
Churchill (3)	0,000	0,004	0,131	4,092E-07	0,059	3,103
Swamee (4)	0,000	0,006	0,598	5,945E-07	0,035	1,401
Cheng (5)	0,000	0,248	2,909	3,243E-04	0,083	40,534
A. Chernikin y B. Chernikin (6)	1,434E-06	0,203	3,457	1,193E-03	16,255	46,818
Brkić y Praks (7)	6,980E-06	14,099	58,378	1,270E-04	1,178	86,337
Díaz—Damacillo et al. (8)	0,000	8,958	25,276	8,154E-06	1,535	236,639
Avci y Karagoz (9)	0,000	1,663	30,425	7,522E-05	0,963	3,106
Brkić y Praks (10)	0,000	1,782	31,435	1,175E-04	0,103	0,124
Marko Milošević et al. (11)	5,088E-06	4,007	17,958	6,542E-02	23,272	311,438

Por último, la muestras generadas por el motor Sobol, tanto para R_e y ε, fueron las mismas en cada evaluación; sin embargo, si el usuario desea que en cada ejecución del CPR las muestras cambien, deberá insertar su decisión en el input, cuando el algoritmo se lo requiera. En todo caso, se recomienda consultar la documentación asociada para más información.

05 CONCLUSIONES

Para comenzar, es importante destacar que las ecuaciones presentadas siguen el comportamiento monotónico de Colebrook—White o el flexional de Nikuradse. Por lo tanto, resulta claro que las expresiones basadas en los resultados de Nikuradse sean las de menor precisión, puesto que la evaluación se realizó con respecto a la formulación universalmente aceptada; la ecuación de Colebrook—White.

En este orden de ideas, es notable enfatizar que los resultados obtenidos son equivalentes, de hecho, el resultado del muestreo general de Sobol (tabla 1) con el logrado por el método de optimización “random-cd” (tabla 2), son idénticos, aunque en realidad, esta casualidad se debe al recorte realizado de los decimales inmersos en cada resultado.

Por otro lado, los autores establecieron que, según el muestreo de puntos cuasi aleatorios de Sobol alcanzados por el CPR, las ecuaciones con menor error relativo máximo, para régimen laminar y turbulento, son las propuestas de Churchill (1977) y Brkić and Praks (2020) [expresión dada en Milošević et al. (2022)] respectivamente.

No obstante, los autores concluyen que, teniendo en cuenta los resultados obtenidos para el error relativo promedio en ambos regímenes de flujo, la formulación de Swamee (1993) es la más adecuada, aunque no se descarta la expresión de Churchill (1977), ya que la diferencia del error cometido en cuestión por ambas ecuaciones, para flujo laminar y turbulento, no es muy contundente.

En otro sentido, es posible realizar diferentes pruebas adicionales con el algoritmo CPR, ya que este cuenta con la practicidad de validar eficazmente diversas condiciones para las funciones presentadas en este trabajo, en cualquier caso y, para casos extraordinarios, se recomienda consultar previamente la documentación del motor Sobol.

En suma, los autores consideran que, conforme a los resultados presentados y de acuerdo con los requerimientos específicos para cada caso, el lector determine qué ecuación le resulta más conveniente utilizar.

06 REFERENCIAS

Avci A. and Karagoz I. (2009). “A novel explicit equation for friction factor in smooth and rough pipes”, Journal of Fluids Engineering, vol. 131, no. 6, pp. 1—4, ISSN 0098-2202, Turquía.

Avci A. and Karagoz I. (2019). “A new explicit friction factor formula for laminar, transition and turbulent flows in smooth and rough pipes”, European Journal of Mechanics, vol. B, no. 78, pp. 182—187, ISSN 0997-7546, Turquía.

Brkić D. (2011). “Review of explicit approximations to the Colebrook relation for flow friction”, Journal of Petroleum Science and Engineering, vol. 77, no. 1, pp. 34—48, ISSN 0920-4105, Serbia.

Brkić D. and Praks P. (2018). “Unified friction formulation from laminar to fully rough turbulent flow”, Applied Sciences, vol. 8, no. 11, pp. 1—13, ISSN 2076-3417, Serbia.

Brkić D. and Praks P. (2020). “Review of new flow friction equations: Constructing Colebrook’s explicit correlations accurately”, Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería, vol. 36, no. 1, pp. 1—8, ISSN 0213-1315, Serbia.

Brkić D. and Praks P. (2022). “Approximate flow friction factor: Estimation of the accuracy using Sobol’s Quasi-random sampling”, Axioms, vol. 11, no. 36, pp. 1—8, ISSN 2075-1680, Serbia.

Cheng N. (2008). “Formulas for friction factor in transitional regimes”, Journal of Hydraulic Engineering, vol. 134, no. 9, pp. 1357—1362, ISSN 1943-7900, Singapur.

Chernikin A. and Chernikin B. (2012). "Обобщенная формула для расчета коэффициента гидравлического сопротивления магистральных трубопроводов для светлых нефтепродуктов и маловязких нефтей (En ruso)", наука и технологии трубопроводного транспорта нефти и нефтепродуктов, vol. 8, no. 4, pp. 64—66, ISSN 2541-9595, Rusia.

Churchill W. (1973). "Empirical expressions for the shear stress in turbulent flow in commercial pipe", AIChE Journal, vol. 19, no 2, pp. 375—376, ISSN 0001-1541, Universidad de Pensilvania.

Churchill W. (1977). "Friction-factor equation spans all fluid-flow regimes", Chemical Engineering, vol. 84, no. 24, pp. 91—92, ISSN 1873-3212, New York. EEUU.

Colebrook C. and White C. (1939). "Turbulent flow in pipes, with particular reference to the transition region between the smooth and rough pipe laws", Journal of the Institution of Civil Engineers, vol. 11, no. 4, pp. 133—156, ISSN 0368-2455.

Díaz—Damacillo L. and Plascencia G. (2019). "A new six parameter model to estimate the friction factor", AIChE Journal, vol. 65, no. 4, pp. 1144—1148, ISSN 0001-154, México.

Díaz—Damacillo L. Plascencia G. and Robles—Agudo M. (2020). "On the estimation of the friction factor: a review of recent approaches", SN Applied Sciences, vol. 2, no. 163, pp. 1—13, ISSN 3004-9261, México.

Milošević M. Brkić D. Praks P. Litričin D. and Stajić Z. (2022). "Hydraulic losses in systems of conduits with flow from laminar to fully turbulent: A new symbolic regression formulation", Axioms, vol. 11, no. 5, pp. 1—11, ISSN 2075-1680.

Moody L. (1944). "Friction factors for pipe flow", Journal of Fluids Engineering, vol. 66, no. 8, pp. 671—678, ISSN 0098-2202.

Nikuradse J. (1950). "Laws of flow in rough pipes", National Advisory Committee for Aeronautics, Washington, extraído de: https://ntrs.nasa.gov/citations/19930093938, en enero 2024.

Saldarriaga J. (2016). "Hidráulica de tuberías", Editorial Alfaomega, tercera edición, ISBN 978-958-682-971-7, Bogotá, Colombia.

Swamee P. (1993). "Design of a submarine oil pipeline". Journal of Transportation Engineering, vol. 119, no. 1, pp. 159—170, ISSN 2473-2893.

Swamee P. and Jain A. (1976). "Explicit equations for pipe flow problems", Journal of the Hydraulics Division, vol. 102, no. 5, pp. 657—664, ISSN 1943-7900.

The SciPy Community. (2023). "Scipy.stats.qmc.Sobol", extraído de: https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.stats.qmc.Sobol.html, en enero 2024.

CONFLICTO DE INTERESES

Los autores declaran que no existen conflictos de intereses.

CONTRIBUCIÓN DE LOS AUTORES

Juan Camilo Castro Velásquez https://orcid.org/0009-0006-1914-9704

Trabajó en el desarrollo del modelo computacional y en la redacción del documento

Sebastián Pérez Ocampo https://orcid.org/0009-0002-8359-0167

Trabajó en la recolección de información y en la redacción del documento

Juan David Rincón Vanegas https://orcid.org/0000-0001-9932-3253

Trabajó en el desarrollo del modelo computacional y en la redacción del documento