23

Fecha de presentación: abril, 2017
Fecha de aceptación: junio, 2017
Fecha de publicación: agosto, 2017

LOS PROCESOS DIDÁCTICOS

PARA EL TRATAMIENTO DE TEOREMAS MATEMÁTICOS EN EL NIVEL SUPERIOR

THE DIDACTIC PROCESSES FOR THE TREATMENT OF MATHEMATICAL THEOREMS IN HIGHER EDUCATION

Dr. C. José Enrique Martínez Serra[1]
E-mail: j.martinez@umet.edu.ec
Dr. C. Ramiro Infante Roblejo[1]
E-mail: rinfante@umet.edu.ec
Dra. C. María Lucía Brito Vallina[1]
E-mail: mbrito@umet.edu.ec
[1] Universidad Metropolitana. República del Ecuador.

Cita sugerida (APA, sexta edición)

Martínez Serra, J.E., Infante Roblejo, R., & Brito Vallina, M. L. (2017). Los procesos didácticos para el tratamiento de teoremas matemáticos en el nivel superior. *Universidad y Sociedad*, 9(2), 145-153. Recuperado de http://rus.ucf.edu.cu/index.php/rus

RESUMEN

El objetivo del presente artículo es realizar una propuesta de procesos para el tratamiento de teoremas matemáticos en el nivel superior. Se realiza a partir de un sistema de acciones didácticas basadas en la resolución de problemas para contribuir a elevar la calidad del tratamiento metodológico y al aprendizaje significativo de los teoremas en el proceso de enseñanza - aprendizaje del Análisis Matemático para la carrera Licenciatura en Matemáticas. Para cumplir el objetivo se han desarrollado los procesos previstos, se ejemplifica por medio de un conjunto de problemas, se expresa la intención didáctica, con la resolución se tributa a subprocesos que intervienen en el tratamiento de los teoremas (obtención, demostración, valoración, asimilación, aplicación, generalización).

Palabras clave: Teoremas matemáticos, proceso de enseñanza-aprendizaje basado en problemas, análisis matemático.

ABSTRACT

The proposed objective of this articleis “to make a proposal for new processes for the treatment of mathematical theorems at the superior level”. The proposal take into account a system of didactics actions based on problem solving, to help raise the quality of the methodological treatment and meaningful learning theorems in the process of Teaching - Learning Mathematical Analysis in the Licensure career Maths.

The objective set has been completed, as have been proposed processes provided for handling the necessary and sufficient arguments for it, while exemplified by a set of problems, expressing the didactic intention of them, whose resolution is taxed some of the threads involved in the processes of treatment of the theorems (obtaining, demonstration and assessment, valuation, assimilation, application, generalization).

Keywords: Mathematical theorems, problem-based teaching-learning process, mathematical analysis.

INTRODUCCIÓN

Un rasgo común de muchas investigaciones pedagógicas contemporáneas es que se dirigen hacia los educandos para que no sean vistos como receptores pasivos de volúmenes de contenidos, sino como individuos capaces de aprender activa y significativamente, pero no siempre se logra en la práctica educativa de la educación superior.

En el ámbito de la Didáctica de la Matemática, Torres, citado por Díaz (2003), plantea: *"¿cómo puede lograrse el aprendizaje desarrollador en la enseñanza de la Matemática? De acuerdo con lo que se ha venido reflexionando no puede faltar el trabajo sistemático con problemas, pues sin él la apropiación no podrá ser activa ni creadora".*

En Rebollar (2000, p.25) puede leerse:

"La enseñanza basada en problemas consiste en el planteo y resolución de problemas en cuya resolución se produce el aprendizaje. En este caso no se trata de problematizar el objeto de enseñanza ni de plantear problemas complejos que requieran de nuevos conocimientos matemáticos, más bien se trata de resolver problemas matemáticos relacionados con el objeto de enseñanza, sin confundirse con él, y que van conformando hitos en el nuevo aprendizaje. Este tipo de enseñanza no está didácticamente estructurado".

Una de las situaciones típicas en el proceso de enseñanza – aprendizaje de las Matemáticas en general y de la disciplina Análisis Matemático en particular, es el tratamiento de los teoremas matemáticos, los cuales expresan relaciones entre conceptos ya definidos, por lo que dichos teoremas requieren, como condición necesaria, de un adecuado tratamiento de los conceptos que relacionan, a la vez se necesita de procesos propios, como el de la preparación del camino para la obtención del teorema, el de búsqueda de la demostración, el de representación de la demostración y de asimilación del teorema y su demostración (Martínez, 2005).

Una adecuada disertación para el tratamiento de los teoremas que se imparten en la enseñanza general media (EGM) puede encontrase en Ballester, et al., (1992). No obstante, los autores de este trabajo han obtenido argumentos que demuestran que los procesos propuestos en el texto antes citado no son suficientes para el abordaje de los teoremas que se imparten en la disciplina Análisis Matemático de la carrera Licenciatura en Matemática.

Algunos de estos argumentos son:

» Se ha transferido a la Educación Superior los métodos establecidos en la Didáctica de la Matemática para la Enseñanza Media para el tratamiento de teoremas, sin tener en cuenta especificidades que posee en el proceso de enseñanza aprendizaje de la matemática superior.

» En el nivel superior pueden considerarse contenidos referentes a otras disciplinas matemáticas que brindan herramientas para la demostración de proposiciones.

» El empleo de medios auxiliares heurísticos durante la búsqueda de la demostración de un teorema en el nivel superior adquiere una diversidad mayor que la presentada en el nivel medio.

» El manejo frecuente de lemas y corolarios como casos particulares de teoremas en el nivel superior.

» El establecimiento frecuente de articulación horizontal entre asignaturas del año de estudio y vertical hacia delante o hacia atrás con asignaturas de años anteriores o posteriores para emplear sus herramientas o para realizar consideraciones perspectivas y retrospectivas.

» La selección de la vía de demostración más racional, la cual no coincide necesariamente con la más sencilla, es tarea frecuente para los estudiantes del nivel superior, al enfrentarse a la demostración de teoremas.

» La connotación que adquiere la aplicación de teoremas y demostraciones conocidas (o algunos de sus pasos) a la formulación de proposiciones y obtención y demostración de nuevos teoremas.

» La aplicación de teoremas conocidos en tareas investigativas encaminadas a resolver problemas relativos a las investigaciones que se llevan a cabo en los grupos de investigación del entorno de los estudiantes.

» La importancia que posee la realización de generalizaciones de teoremas en el nivel superior, a diferencian de la enseñanza media.

Estos argumentos llevan a los autores a replantearse la validez de los procesos propuestos en el tratamiento de teoremas de la Matemática que se imparte en la enseñanza media y que han sido extrapolados de manera acrítica a los teoremas del nivel superior. Por ello, el presente artículo posee como objetivo realizar una propuesta de nuevos procesos para el tratamiento de teoremas matemáticos en el nivel superior. Se realiza una comparación y ejemplificación de los procesos existentes y los propuestos por los autores por medio de una actualización de los resultados presentados por Celestino (2014).

DESARROLLO

Se presenta la articulación entre las fases consideradas para la resolución de problemas con los procesos para el tratamiento de teoremas, estableciendo en cada uno de ellos los aspectos comunes con Ballester, et al. (1992), representados por proceso de búsqueda del teorema (B1), procesos de búsqueda de la demostración (B2), procesos de representación de la demostración (B3) y proceso de asimilación del teorema y su demostración (B4).

Los procesos propuestos por los autores (PPA) son: proceso de obtención del teorema (U1), proceso de demostración del teorema (U2), proceso de valoración del teorema (U3), proceso de asimilación del teorema y su demostración (U4), proceso de aplicación del teorema (U5), proceso de generalización / restricción (U6). Se realizan las respectivas argumentaciones, se muestran algunas consideraciones que justifican su elaboración y ejemplificaciones pertinentes.

§1. Proceso de obtención del teorema (U1)

En este proceso se dirigen las acciones de los alumnos a establecer una suposición aplicando recursos heurísticos. De manera general es casi análogo al B1; sin embargo, se considera pertinente introducir y hacer énfasis, por la importancia y aplicación que tiene en la Educación Superior, el empleo de organizadores de la información como ilustración del vacío que se pretende llenar con la regularidad que se busca, para contribuir al aprendizaje significativo de los estudiantes. Un ejemplo de ello es:

Ejemplo 1:

Después de dar los primeros pasos durante la búsqueda del teorema que relaciona las colecciones de las funciones continuas con las derivables en un punto x_0, puede suscitarse un intercambio heurístico encaminado a analizar: ¿Cuál mapa de extensiones pudiera relacionar las colecciones de funciones continuas C $[x_0]$ en x_0 con las derivables D$[x_0]$ en x_0?

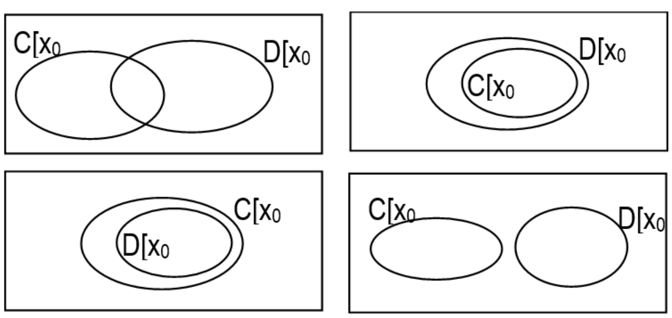

Figura 1. Posibles mapas de extensiones que relacionan las funciones derivables y las continuas en un punto.

Este proceso, desde la propia propuesta de Ballester, et al. (1992), al igual que esta, expresa la articulación que se da entre la resolución de problemas en el tratamiento para la obtención del teorema. Es por tal motivo que este proceso queda estructurado de la siguiente manera:

Comprender el problema:

- Creación de motivos, dada por la necesidad de encontrar una regularidad desconocida hasta el momento. ***(Común con B1).***
- Planteamiento del carácter de la regularidad que se desea encontrar (existencial, universal). ***(Común con B1).***
- Empleo conveniente de organizadores de la información que expresen el vacío que se necesita llenar con la nueva proposición. ***(PPA)***
- Determinación de las condiciones que van a constituir parte de la hipótesis del teorema. ***(Común con B1).***
- En esta fase los datos del problema de la obtención son dichas condiciones y la incógnita es la regularidad que se desea encontrar. (PPA).

Concebir del plan:

- Precisar el objetivo de la búsqueda, teniendo en cuenta las condiciones en que se desarrolla (medios, tareas resueltas anteriormente). (Común con B1)
- Vía que se empleará (Vía reductiva o vía deductiva). (Común con B1)
- Encontrar la idea de solución y preparar un plan para su realización. (Común con B1)

Ejecutar del plan:

- Conducción a la suposición deseada, a través del desarrollo de la idea y el plan de solución previsto en el subproceso anterior. (Común con B1)
- Culmina con el enunciado de una proposición que expresa la regularidad que se investiga. (Común con B1)

Examinar la solución:

- Análisis retrospectivo de los métodos empleados (analogías, mediciones, comparaciones). (Común con B1)
- Valoración crítica de la vía utilizada (deductiva o reductiva). (Común con B1)
- Valorar si la proposición encontrada expresa la relación buscada entre los datos y las incógnitas. (Común con B1)

Se considera pertinente, a diferencia con Ballester, no incluir en este proceso lo que propone acerca de *reflexión sobre la necesidad de emprender una demostración*, ya que esta formaría parte del siguiente proceso, con el que se pretende motivar a partir de la necesidad de buscar una demostración de la proposición encontrada como problema a resolver.

Ello influye positivamente desde el punto de vista formativo en los estudiantes universitarios, tiene marcado énfasis en los profesores de Matemática, pues les permite percibir la articulación entre la resolución de problemas con los procesos para el tratamiento de teoremas como parte de las habilidades didácticas a lograr. Esto hace que, después de haber obtenido el teorema, llevar a cabo la demostración de este como todo un proceso, puede considerarse como un gran problema a resolver. Es por ello que el siguiente proceso es la demostración del teorema (U2).

§2. Proceso de demostración del teorema (U2)

En este nuevo proceso los autores consideran necesario que se dé una unidad de los procesos de búsqueda de la demostración (B2) y la representación de la demostración (B3) que Ballester propone, ya que el primero solo se queda en concebir del plan para la demostración y no es hasta el segundo que se lleva a vías de hecho la demostración buscada. Puede ser que por esta causa Ballester no concibe el empleo de su programa heurístico general para la resolución de problema en la demostración del teorema. Estos dos procesos en la actividad docente de la Educación Superior quedan en el marco de una misma clase como expresión del PEA.

Para este proceso los autores introducen otros elementos, los cuales quedan expresados dentro de su estructura y son argumentados en el mismo. Se describe este proceso.

Proceso de demostración del teorema (U2): está encaminado a encontrar la idea de la demostración, trazar y realizar el plan de solución de acuerdo con los medios disponibles, dejar por escrito la cadena de inferencias y fundamentaciones que la hacen comprensible.

Comprender el problema:

- Debe motivarse la necesidad de la demostración haciendo ver a los alumnos los posibles errores cometidos al comparar los casos particulares durante la obtención (errores de medición, ópticos, existencia de recíprocos falsos). (Común con B2)
- Debe precisarse lo que se desea demostrar por medio de la comprensión del enunciado de la proposición, análisis de su estructura lógica: ¿es una proposición universal o existencial?, ¿cuáles son sus premisas y su tesis?, ¿se puede construir algún medio auxiliar para el análisis? (Común con B2)
- En esta fase el dato es la regularidad obtenida y la incógnita es la demostración formal de la misma para llegar a constituirla como teorema. (PPA)

Concebir del plan:

- Debe determinarse el campo de búsqueda, respondiendo las preguntas: ¿se conocen las definiciones, caracterizaciones o condiciones necesarias de los conceptos relacionados en el teorema?, ¿han sido estudiados otros teoremas con premisas o tesis similares a las de este? (Común con B2)
- Además de la unidad de estudio y los contenidos anteriores deben considerarse contenidos referentes a otras disciplinas matemáticas que brindan herramientas para la demostración de proposiciones. (PPA)
- Debe elegirse el método de demostración más adecuado: directo o indirecto. El primero generalmente cuando el teorema está enunciado en forma implicativa y pueden apreciarse indicios de que, por medio de inferencia lógicas, puede llegarse a la tesis. El indirecto cuando se necesita probar la unicidad de algún elemento, o sea más conveniente realizar inferencias lógicas a partir de la negación de la tesis y usando la hipótesis, llegar a una contradicción. (Común con B2)
- Deben precisarse los recursos heurísticos a emplear: principios, reglas, estrategias, medios e impulsos comprensibles a los alumnos. (Común con B2)
- Deben emplearse las reglas heurísticas en el proceso de búsqueda de la demostración, además de las propuestas para el nivel medio: sustituir conceptos por sus definiciones, representar magnitudes con variables; se proponen además para el nivel superior: sustituir conceptos por sus caracterizaciones o por sus condiciones necesarias, en dependencia de una u otra. Un ejemplo ilustrativo es el siguiente teorema con su demostración:

Ejemplo 2.

Teorema: toda función derivable en un punto es continua en ese punto.

Demostración: La condición de continuidad es equivalente a demostrar que:

$$\lim_{h\to 0}\left[f(x_0+h)-f(x_0)\right]=0$$

Ecuación 1: Expresión equivalente para la continuidad puntual

Partiendo del miembro izquierdo de esta expresión, resulta

$$\lim_{h\to 0}[f(x_0+h)-f(x_0)]=\lim_{h\to 0}h\frac{[f(x_0+h)-f(x_0)]}{h}=$$
$$=\lim_{h\to 0}h\frac{[f(x_0+h)-f(x_0)]}{h}=f'(x_0)\lim_{h\to 0}h=0$$

Ecuación 2: Idea de la demostración

- Deben precisarse los medios auxiliares heurísticos, confeccionar figuras de análisis, trazar líneas auxiliares. Se proponen la definición de funciones auxiliares convenientes, empleo de desigualdades oportunas, cambios de variables convenientes, formulación y demostración de lemas como teoremas auxiliares a emplear en la demostración. (PPA)
- En esta fase debe valorarse la conveniencia de enunciar y demostrar uno o varios lemas auxiliares que contengan resultados parciales importantes a ser usados en la elaboración del plan de demostración. (PPA)
- Debe aprovecharse las potencialidades del error que cometen los estudiantes durante la solución de los problemas conducentes a la demostración. (PPA)
- Se elabora el plan de demostración. (Común con B2)
- Una vez encontrada la idea de la demostración, se debe comprobar si las inferencias realizadas son correctas y si puede fundamentarse cada paso. (Común con B2)

Ejecutar del plan:

- Se tiene en cuenta la idea y el plan de demostración hallados. (Común con B3)
- Debe tenerse en cuenta la sucesión de indicaciones (en demostraciones directas): escribe las premisas y la tesis, dibuja una figura de análisis en caso necesario, escribe en orden todas conclusiones parciales que van conduciendo de la premisa a la tesis, verifica las inferencias y escribe las fundamentaciones necesarias, elabora una oración que exprese lo que has demostrado. (Común con B3)
- Debe aprovecharse las potencialidades del error que cometen los estudiantes durante ejecución del plan. (PPA)
- Debe dejarse por escrito la cadena de inferencias y sus fundamentaciones que la hacen comprensible. (Común con B3).

Examinar la solución:

- Análisis retrospectivo de los métodos empleados (directo o indirecto).
- Análisis retrospectivo de la representación de la demostración realizada. (PPA)
- Debe motivarse la necesidad de realizar valoraciones sobre la consistencia de los pasos ejecutados en la demostración realizada. (Común con B3)
- En cuanto al resultado de la representación de la demostración, pueden contestarse las preguntas: ¿contiene los pasos fundamentales para la comprensión de la demostración?, ¿está expresada en un lenguaje adecuado?, ¿contiene pasos superfluos? (Común con B3)

§3. Proceso de valoración del teorema (U3) (PPA)

Este proceso está encaminado a valorar otras vías de demostración del teorema, valoración del recíproco del teorema y su validez, así como ubicar el teorema obtenido en el sistema de conocimientos del alumno. Cada uno constituye un subproceso que posee su tratamiento independiente, según el modelo de Polya para la resolución de problemas.

Antes de presentar la valoración de otras vías de demostración, resulta pertinente esclarecer que la selección de la vía de demostración más racional, no coincide necesariamente con la más sencilla, ello se ejemplifica a continuación:

Ejemplo 3.

Teorema: la derivada de la función $y = \operatorname{sen} x$ x es $y' = \cos x$

Demostración:

Una demostración muy usada para este teorema es:

$$(senx)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{sen(x+\Delta x) - senx}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{senx \cos \Delta x + \cos x \, sen \Delta x - senx}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0}\left[senx \frac{\cos \Delta x - 1}{\Delta x}\right] + \lim_{\Delta x \to 0}\left[\cos x \frac{sen \Delta x}{\Delta x}\right] =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0}\left[senx \frac{\frac{(\Delta x)^2}{2}}{\Delta x}\right] + \lim_{\Delta x \to 0} \cos x = \cos x$$

Ecuación 3: Demostración clásica para este resultado

Puede emplearse una identidad menos conocida que conduce más rápidamente al resultado, como la descomposición de la diferencia de senos en producto de senos y cosenos, o sea:

$$(senx)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{sen(x+\Delta x) - senx}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2sen\frac{\Delta x}{2}\cos\frac{2x+\Delta x}{2}}{\Delta x} =$$

$$= \cos x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} = \cos x$$

Ecuación 4: Demostración alternativa para este resultado

Valoración de otras vías de demostración (PPA)

Comprender el problema:

» Debe motivarse la necesidad de realizar valoraciones sobre la conveniencia de plasmar otras vías de demostración del teorema. (Común con B4)

» En esta fase los datos son los pasos con las fundamentaciones seguidas durante la demostración realizada y las incógnitas son las otras vías de demostración que pueden realizarse. (PPA)

Concebir del plan:

» En cuanto a la confección y/o ejecución de otros planes de demostración se debe incluir contenidos de otras disciplinas realizando una adecuada articulación tanto horizontal como vertical hacia atrás (con disciplinas de años anteriores) y vertical hacia delante (con disciplinas de años venideros).

Ejemplo 4:

» De la articulación horizontal. Al demostrar el *Teorema de Fermat: sea la función f(x) definida en un intervalo (a, b) y tal que en un cierto punto c∈(a, b) alcanza su valor máximo o mínimo en ese intervalo. Si la derivada* f' *(c) existe, entonces,* f' *(c) = 0*, puede emplearse la interpretación geométrica de la derivada y utilizar resultados de la asignatura Geometría Analítica del mismo año para arribar a la conclusión de que el teorema es equivalente a afirmar que "si la función f(x) definida en un intervalo (a, b) alcanza su valor máximo o mínimo en un cierto punto c∈(a, b), entonces la recta tangente por ese punto es horizontal", para entonces emplear herramientas de esta otra disciplina durante la demostración del teorema.

» De articulación vertical hacia atrás:

En el Análisis Matemático III: al demostrar el teorema relativo a las derivadas de funciones vectoriales compuestas que ofrece el procedimiento para el cálculo de estas derivadas, se emplean resultados del Álgebra I relativos a la multiplicación de dos matrices enlazadas.

» De articulación vertical hacia delante: al valorar la calidad del teorema "***si f es derivable en un punto entonces f es continua en ese punto***" y de otro teorema en la misma unidad de estudio sobre la equivalencia "***f es derivable en un punto si y solo f es diferenciable en ese punto***", el profesor puede lanzar las preguntas:

¿Para qué resulta necesario estudiar las funciones diferenciables si son equivalentes a las derivables?; de la Geometría Analítica ya se conocen funciones de dos variables que representan superficies como el paraboloide $z=x^2+y^2$, ¿se mantendrán estos resultados cuando se estudie el cálculo diferencial de estas funciones de varias variables? El profesor anuncia la respuesta negativa a esta última pregunta y expresa que pueden existir derivadas de funciones de varias variables en un punto sin ser la función continua en dicho punto, de ahí la importancia que posee el conocimiento de los conceptos y las relaciones que se establecen entre ellos mediante los teoremas estudiados, para que en próximas asignaturas puedan comprender cuáles de estos resultados se mantienen o cambian al considerar funciones de más variables.

Se esclarece que la demostración realizada del teorema puede realizarse de manera más racional cuando se aborden contenidos que ofrezcan procedimientos más ventajosos de trabajo. (PPA)

Examinar la solución:

» Análisis retrospectivo de los métodos empleados. Puede valorarse la conveniencia de uno u otro método escogido para la obtención de otras vías de demostración (PPA)

» Valoración crítica de la vía utilizada. Debe discernirse sobre la complejidad, el tiempo y el espacio invertidos con las diferentes vías de demostración obtenidas (PPA)

Valoración del recíproco del teorema y su validez (Común con B4)

Comprender el problema:

» Debe motivarse la necesidad de realizar valoraciones sobre la validez del recíproco del teorema en estudio. (Común con B4)

» Debe considerarse que en esta fase el dato es el teorema obtenido y las incógnitas son el enunciado del recíproco de la misma, la determinación de su valor de verdad y la demostración de dicho valor de verdad. (PPA)

Concebir del plan:

» Deben establecerse intercambios heurísticos dirigidos a cómo formular el recíproco del teorema, proponer el valor de verdad del mismo, valorar su validez por medio de contraejemplos si es falso y la demostración si es verdadero. (Común con B4)

Examinar la solución:

» Valorar la conveniencia de los métodos empleados tanto en la formulación del recíproco como en el análisis de su validez y analizarse la vía más racional para la demostración de la validez del recíproco (directa o indirecta) o su falsedad (contraejemplos). (PPA)

Valoración del lugar que ocupa el teorema en el sistema de conocimientos (PPA)

Comprender el problema:

» Ubicar el teorema en el sistema de conocimientos que poseen los estudiantes. (PPA)

» Debe considerarse en esta fase que los datos son el teorema obtenido, el sistema de conocimientos que poseen los alumnos y las formas de organizar el conocimiento que poseen; las incógnitas son las formas de integrar el nuevo teorema con el sistema de conocimientos que poseen los alumnos mediante organizadores adecuados. (PPA)

Concebir del plan:

» Mediantes preguntas heurísticas ubicar significativamente el nuevo teorema, con adecuados organizadores, en el sistema de conocimientos que posee el estudiante y valorar su importancia según el lugar que le corresponde en la teoría matemática. (PPA)

Ejecutar del plan:

» Se tienen en cuenta las ideas y el plan de ubicación del teorema obtenido en el sistema de conocimientos que poseen los alumnos. (PPA)

Examinar la solución:

» Análisis retrospectivo de los métodos empleados (si era más conveniente emplear otros organizadores que los empleados durante la ejecución). (PPA)

» Valoración crítica de la vía utilizada. (PPA)

§4. Proceso de asimilación del teorema y su demostración (U4)

Para lograr la asimilación de un teorema y su demostración, el profesor debe trabajar sistemáticamente en la formación y desarrollo de las habilidades propias de este tratamiento; se da como proceso a lo largo del sistema de clase de la unidad.

No obstante, este proceso de asimilación para la Educación Superior incluye una acción didáctica no contemplada en B4, como es la ubicación del teorema en el nuevo sistema de conocimientos que va adquiriendo el alumno paulatinamente en la impartición del tema o de temas venideros. Un ejemplo de ello puede ser:

Ejemplo 5:

Después de la impartición de varios conceptos en el tema cálculo diferencial de funciones, puede retomarse la necesidad de volver a reubicar el teorema en el nuevo sistema de conocimientos del alumno.

Puede plantearse la situación problémica: *teniendo en cuenta que el mapa de las extensiones ya conocido de los conceptos de función, función continua y función derivables sobre un intervalo abierto I de R, amplíe el mismo con las extensiones de los conceptos de función convexa Cv[I] y función estrictamente convexa* $Cv_E[I]$*. Proponga ejemplos de funciones concretas en cada intersección de conjuntos.*

Al resolver este problema los alumnos que han aprendido significativamente, deben elaborar un mapa de extensiones como el siguiente y deben ser capaces de poner ejemplos en cada intersección de conjuntos.

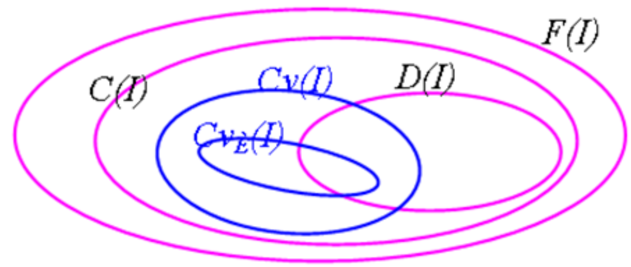

Figura 2. Mapa de extensiones que relacionan las funciones, las funciones continuas, las derivables, las convexas y las estrictamente convexas.

Por tales motivos se presentan algunas consideraciones que se han de tener en cuenta en el PEA en la Educación Superior para este proceso de asimilación:

» Se debe decidir cuáles objetivos parciales se han de lograr en cada clase o sistema de clases en torno a la fijación del teorema y su demostración. (Común con B4)

» Crear las condiciones que conduzcan al logro de estos objetivos mediante un papel activo del alumno en el aprendizaje por medio del planteamiento de problemas y ejercicios cuidadosamente seleccionados y encaminados a:

Determinar y fundamentar valores de verdad de proposiciones; refutar una proposición (o conclusión) falsa; reformular proposiciones conocidas; saber negarlas y hallar sus recíprocos; reproducir ideas de demostración; reproducir la representación conocida de una demostración; hallar una idea de demostración adecuada para una proposición dada; representar una demostración cuya idea es conocida. (Común con B4)

Formular proposiciones, comprender el contenido de teoremas y sus demostraciones, aplicar teoremas a situaciones diversas. (Común con B4)

Reproducir las demostraciones básicas definidas en el programa. (Común con B4)

» Debe tenerse en cuenta formas de fijación del contenido matemático: ejercitación, repaso, sistematización, profundización. (Común con B4)

» Debe ubicarse el teorema en el nuevo sistema de conocimientos que va adquiriendo el alumno paulatinamente en la impartición del tema o de temas venideros. (PPA)

§5. Proceso de aplicación del teorema (U5)

En el PEA de la Matemática de la Educación Superior, como hay mayor desarrollo del pensamiento abstracto, los alumnos pueden realizar razonamientos deductivos en base a conceptos y teoremas ya obtenidos y que conduzcan a la obtención de nuevas proposiciones; hace que este proceso contemple otros aspectos que van más allá de los incluidos en B4 y deben considerarse para el buen desarrollo y planeación de la actividad por parte del docente. Los mismos son:

» La aplicación de teoremas y demostraciones conocidas (o algunos de sus pasos) a la formulación de proposiciones y obtención y demostración de nuevos teoremas:

Ejemplo 6:

Puede plantease la situación problémica: *"Una de las medias numéricas conocidas entre dos números positivos es la media potencial de orden p, p≠0 dada por la fórmula*

$$M_p(a,b)=\left(\frac{a^p+b^p}{2}\right)^{\frac{1}{p}},$$

Ecuación 5: Fórmula de la media potencial de orden p

de la cual se desea conocer la mayor cantidad de propiedades. ¿Qué se puede afirmar sobre su continuidad, monotonía, derivabilidad, convexidad?"

Al aplicar el teorema de la condición suficiente de monotonía: "*Si para todo $x\in (a, b)$, $f'(x) \geq 0$, entonces f es creciente en (a, b)*" se obtiene que M_p es creciente.

La aplicación de teoremas conocidos en tareas investigativas.

Sobre la base de estas consideraciones y lo propuesto por Ballester, este proceso queda expresado en dos aspectos fundamentales, uno encaminado a crear las condiciones en los problemas para la aplicación de los teoremas y el otro, a las valoraciones que se deben hacer para el empleo del teorema en nuevas situaciones.

Deben crearse condiciones para identificar cuál teorema debe aplicarse en determinados pasos de la solución de problemas de aplicación, como son:

Ejercicios de demostración para un adiestramiento heurístico. (Común con B4)

En la medida en que se avanza en el estudio de la teoría, pueden resolverse ejercicios de demostración más complicados con aplicaciones de carácter intramatemático. (Común con B4)

La aplicación a la elaboración de procedimientos y resolución de problemas prácticos. (Común con B4)

Formulación de proposiciones y obtención y demostración de nuevos teoremas. (PPA)

Tareas investigativas. (PPA)

» Cuando se identifica el teorema a usarse, el profesor suscita un intercambio heurístico encaminado al empleo correcto del teorema en la nueva situación. (Común con B4)

Luego de aplicar el teorema a diversas situaciones intramatemáticas y extramatemáticas se requiere, como parte de la profundización en el proceso B4, realizar generalizaciones y restricciones de este, aspectos que constituyen acciones didácticas contempladas, pero que no quedan claras las formas en las que se realizan; se supone que se refiere al debilitamiento y fortalecimiento respectivo de las premisas del teorema. Es en ello que radica la esencia del siguiente proceso.

§6. Proceso de generalización / restricción (U6)

Ejemplo 7:

Generalización por consideración de contextos más amplios

El teorema "si $x_0\in R$ y $\exists f'(x_0)$ entonces f es continua en x_0" si se amplía en una dimensión el conjunto al cual pertenece el punto, o sea, "si $(x_0, y_0)\in R^2$, $\exists fx'(x_0, y_0)$ y $\exists fy'(x_0, y_0)$ entonces no se puede garantizar nada sobre la continuidad de f en (x_0, y_0)"

Ejemplo 8:

Restricción por consideración de contextos más estrechos. El teorema expresa.

"si $f: D\subset R^n \to R^m$ es diferenciable en el conjunto D abierto y conexo, entonces se cumple que el diferencial df (x)= 0 en todo punto de D si y solo si f es constante en D"

Al suponer *m=1, n>1,* se restringe al caso de funciones escalares de varias variables, al suponer *n=1, m>1*, se restringe al caso de funciones vectoriales de una variable y al suponer *n=m=1*, se restringe al caso de funciones escalares de una variable real, ya estudiadas anteriormente.

Realizar estas restricciones es conveniente, para analizar el significado geométrico del teorema en los diferentes espacios que se traten.

Sobre la base de los fundamentos asumidos y las particularidades de la Educación Superior, este proceso se concibe de la siguiente forma:

Comprender el problema:

» Debe motivarse la necesidad de realizar generalizaciones/restricciones sobre el teorema obtenido, lo cual se puede lograr mediante subproblemas que muestren la necesidad de debilitar/ fortalecer la hipótesis del teorema o de ampliar alguno de los conceptos que se manejan en la hipótesis a un contexto más amplio. (PPA)
» En esta fase los datos son la hipótesis y la tesis del teorema obtenido y las incógnitas son las posibles generalizaciones/ restricciones del teorema a realizar. (PPA)

Concebir del plan:

» Encontrar la idea para realizar la generalización/ restricción, esto conlleva a:

  Determinar cuáles conceptos o propiedades de las que aparecen en la hipótesis vale la pena debilitar/ fortalecer para obtener una generalización/ restricción. (PPA)

  Determinar cuáles contextos más amplios para generalizar/ restringir el teorema vale la pena considerar en algún concepto que se maneja en la hipótesis. (PPA)

Ejecutar del plan:

» Se tienen en cuenta los planes de generalización/ restricción determinados. (PPA)
» Realizar generalizaciones/ restricciones: (PPA)

  Por debilitamiento/ fortalecimiento de la hipótesis del teorema. (PPA)

  Por consideración de contextos más amplios/ de contextos más estrechos en algún concepto que se maneja en la hipótesis. (PPA)

Examinar la solución:

» Análisis retrospectivo (si era más conveniente escoger otro concepto de la hipótesis u otro contexto más amplio para generalizar/ otro contexto más estrecho para restringir). (PPA)
» Establecer criterios para valorar la calidad de las generalizaciones/ restricciones hechas (si se siguen cumpliendo propiedades fundamentales que se cumplían en la tesis del teorema generalizado/ restringido, cuáles dejan de cumplirse, cuáles comienzan a cumplirse). (PPA)
» Destacar el hecho que, mediante la restricción, se ha obtenido un corolario. (PPA)

CONCLUSIONES

Mediante las ideas expuestas ha quedado demostrado que la metodología existente para el tratamiento de los teoremas de la Matemática Elemental que se imparte en la enseñanza media, no puede ser extrapolada acríticamente a los teoremas del nivel superior, pues muchos de estos poseen especificidades que no son tenidas en cuenta en los procesos propuestos para el nivel precedente.

Se han propuesto los procesos para el tratamiento de teoremas matemáticos en el nivel superior, tienen presente las especificidades del contenido matemático para este nivel de enseñanza.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Ballester, S., et al. (1992). Metodología de la enseñanza de la Matemática. Tomos I y II. La Habana: Pueblo y Educación.

Celestino, J. M. (2014). Estrategia didáctica basada en la resolución de problemas para el tratamiento de los teoremas matemáticos en la disciplina Análisis Matemático. Tesis para optar por el grado de Doctor en Ciencias Pedagógicas. Santa Clara: Universidad Central "Marta Abreu" de Las Villas.

Díaz, A. C. (2003). Modelo teórico con enfoque interdisciplinario para la formación de los conceptos del cálculo infinitesimal en la preparación de profesores de física y de ciencias exactas. Tesis de doctorado. Santa Clara: Universidad Central "Marta Abreu" de Las Villas.

Martínez, J. E. (2005). Estrategia didáctica para el estudio de conceptos con un proceso de formación inductivo en la carrera Licenciatura en Matemática. Tesis de doctorado. Santa Clara: Universidad Central "Marta Abreu" de Las Villas.

Rebollar, A. (2000). Una variante para la estructuración del proceso de enseñanza aprendizaje de la Matemática a partir de una nueva forma de organizar el contenido en la escuela media cubana. Tesis de doctorado. Santiago de Cuba: Universidad de Oriente.