

Tipo de artículo: Artículo original

Objetos geogebra para el proceso de enseñanza aprendizaje de algunos métodos numéricos en ingeniería informática

Geogebra objects for the teaching-learning process of some numerical methods in computer engineering

Antonio Rey Roque ^{1*} , <https://orcid.org/0000-0003-1205-4981>

Niurys Lázaro Álvarez ² , <https://orcid.org/0000-0003-1414-5211>

Tatiana Leyva Estrada ³ , <https://orcid.org/0000-0002-5493-674X>

¹ Departamento de Matemática, Facultad de Tecnologías Educativas, Universidad de las Ciencias Informáticas. Cuba. antrey@uci.cu

² Departamento de Matemática, Facultad de Tecnologías Educativas, Universidad de las Ciencias Informáticas. Cuba. nlazaro@uci.cu

³ Departamento de Matemática, Facultad de Tecnologías Educativas, Universidad de las Ciencias Informáticas. Cuba. tleystrada@uci.cu

* Autor para correspondencia: antrey@uci.cu

Resumen

La complejidad intrínseca del aprendizaje de los métodos de cálculo aproximado motivó la creación y utilización de un sistema de objetos dinámicos e interactivos elaborados con el software Geogebra que facilitaran su comprensión. Se tuvieron en cuenta los fundamentos teórico pedagógicos de este tipo de recursos educativos, los elementos de la didáctica de la Matemática y las potencialidades de Geogebra. Los problemas trabajados van desde elementos de la teoría de errores a las ecuaciones algebraicas, la aproximación de funciones, la integración y las ecuaciones diferenciales. El sistema de objetos ha sido insertado en el proceso de enseñanza aprendizaje de las asignaturas de la disciplina Matemática lo que ha permitido validar su efectividad e influencia en los resultados académicos. Los objetos para los métodos numéricos forman parte de un sistema mayor de applets de Geogebra que cubren el resto de los temas de la disciplina.

Palabras clave: objetos de aprendizaje; Geogebra; métodos numéricos

Abstract

The intrinsic complexity of learning approximate calculation methods motivated the creation and use of a system of dynamic and interactive objects created with the Geogebra software that would facilitate their understanding. The theoretical pedagogical foundations of this type of educational resources, the elements of Mathematics didactics and the potential of Geogebra were taken into account. The problems worked range from elements of error theory to algebraic equations, approximation of functions, integration and differential equations. The object system has been inserted into the teaching-learning process of the subjects of the Mathematics discipline, which has allowed its effectiveness and influence on academic results to be validated. The objects for numerical methods are part of a larger system of Geogebra applets that cover the rest of the topics in the discipline.

Keywords: learning objects; Geogebra, numerical methods

Recibido: 14/08/2024

Aceptado: 25/10/2024

En línea: 01/11/2024



Esta obra está bajo una licencia *Creative Commons* de tipo **Atribución 4.0 Internacional** (CC BY 4.0)

Introducción

Los métodos numéricos o algoritmos de cálculo aproximado tienen sin dudas una gran importancia práctica, no es poco frecuente que los problemas reales se resuelvan hallando soluciones aproximadas aceptables a partir del número de cifras exactas que precisa el contexto en cuestión. En la formación de ingenieros es imprescindible incluir esta temática, pero se presenta el reto de cómo tratar el volumen de cálculos que normalmente generan estos algoritmos aun cuando por exigencias didácticas los problemas que se presentan no son de gran tamaño.

En la carrera de Ingeniería en Ciencias Informáticas de la Universidad Homónima en La Habana, Cuba, a partir del año 2019 se modificaron los planes de estudio llevando la carrera a cuatro cursos lo que obligó al rediseño de las disciplinas. En el caso de Matemática se definieron cuatro asignaturas centrandose cada una en un concepto esencial de acuerdo a cómo debía tributar al resto de las disciplinas y las tareas profesionales que debe desempeñar el ingeniero graduado.

El problema a resolver, además del que plantea la propia integración de los métodos numéricos a lo simbólico y lo gráfico, estuvo en cómo lograr un proceso de aprendizaje efectivo y eficiente mediante la utilización de recursos digitales, en particular objetos dinámicos e interactivos, con el objetivo de que el aprendizaje de los métodos numéricos sea significativo e integrado a los enfoques simbólico y gráfico en cada temática tratada.

La elección del software Geogebra para la elaboración de los objetos obedece a que es un software de geometría dinámica e interactivo que permite, con fines didácticos, trabajar también el cálculo simbólico y numérico todo interactuando en tiempo real. Es ampliamente utilizado a nivel mundial por la comunidad de educadores no solo de matemática, también de otras ramas de la ciencia. Los límites en su empleo para la enseñanza-aprendizaje están solo en el nivel de creatividad y conocimientos de los profesores y estudiantes.

Materiales y métodos

Los métodos numéricos seleccionados para incluir en la disciplina

Los métodos numéricos que seleccionaron para su inclusión en la disciplina Matemática fueron integrados en los diferentes temas para la resolución numérica de los problemas de manera que se conjugaran con el cuadro algebraico de la resolución exacta o analítica y el cuadro geométrico de la resolución cualitativa, contrarrestando el predominio histórico del tratamiento algebraico en la enseñanza del Cálculo. La introducción de métodos numéricos (MN) en la formación de ingenieros es imprescindible pues la mayoría de los problemas reales se deben resolver por esta vía ante



la imposibilidad o alto costo de emplear métodos analíticos para obtener una solución exacta. La utilización de tecnologías digitales como asistentes matemáticos, objetos digitales que permiten que el estudiante interactúe con los elementos y componentes de lo que se aprende, hacen más significativo el aprendizaje (Ausubel et al., 1997).

Los objetos de enseñanza aprendizaje

Entre las acepciones que los diferentes investigadores dan a los objetos de aprendizaje hay coincidencia en aceptar que son recursos didácticos que permiten al estudiante interactuar con los diferentes elementos de lo que se aprende, estos recursos pueden ser reutilizados y colocarlos en otros contextos educativos (Allan, et al 2017). A los objetos que se presentan en el trabajo se les agrega la enseñanza en tanto cumplen también la función de ser utilizados como medios para la instrucción desarrollada por el profesor en el aula, además dinámicos.

La utilización con efectividad de objetos de aprendizaje de alta calidad ha sido una de las principales claves del éxito del aprendizaje mediado por la tecnología (Gordillo, et al, 2018), características como la accesibilidad, reusabilidad/adaptabilidad e interoperabilidad les da a estas herramientas digitales ventajas importantes en el propósito de que el proceso de enseñanza aprendizaje mejore ostensiblemente (Novillo et al, 2018). El empleo de softwares dinámicos como Geogebra permite la creación de un ambiente de aprendizaje en Matemática que motive el procesamiento de ideas matemáticas por parte del estudiante (Goldenberg, 2003).

Geogebra como herramienta para el diseño y elaboración de los objetos

Geogebra reúne otras características la de ser un software gratuito, libre y de código abierto, es multiplataforma, de fácil utilización con una extensa comunidad mundial y además es sencillo pero potente para su función didáctica (Arteaga et al, 2019). La selección de Geogebra para el diseño y creación de objetos dinámicos e interactivos para el proceso de enseñanza aprendizaje de los métodos numéricos en la carrera de Ingeniería en Ciencias Informáticas tuvo en cuenta estas ventajas sobresalientes al compararlo con otros softwares. Geogebra puede además insertarse en diferentes plataformas de Entornos Virtuales de aprendizaje (EVA) como Moodle, por ejemplo, que es de las más utilizadas y sobre la cual está implementado el EVA de la Universidad de las Ciencias Informáticas. La posibilidad de que los objetos de Geogebra puedan estar en diferentes formatos, web, imágenes, hojas dinámicas, facilita su inserción en estas plataformas.

La selección de Geogebra estuvo motivada además por un software de geometría dinámica eminentemente para su utilización con fines didácticos que permite trabajar el cálculo simbólico y numérico asociados en tiempo real a elementos gráficos. Geogebra es un software ampliamente utilizado a nivel mundial por la comunidad de educadores



de matemática, los límites en su empleo para la enseñanza-aprendizaje están solo en la creatividad y conocimientos de los profesores y estudiantes. Según Gil Vera (2019) Geogebra, por sus características es ideal para crear objetos matemáticos e interactuar con ellos. Geogebra además no deja de ser un asistente matemático, aunque no para cálculos profesionales al estilo de por ejemplo de Mathematica o MatLab aunque sí para lo necesario didácticamente.

Resultados y discusión

Se realizó un estudio detallado de los métodos numéricos incluidos en cada asignatura y su inserción en los objetivos de cada temática específica para determinar que funcionalidades debían tener como mínimo los objetos a diseñar y crear que debían además integrarse al sistema de objetos que para el resto de los temas de la disciplina están en desarrollo o siendo utilizados. Estos objetos se agrupan de acuerdo a su funcionalidad didáctica, de la siguiente forma:

1. Propiciar la interpretación de conceptos.
2. Visualizar e interactuar con la resolución de problemas generales y particulares por temática.
3. Facilitar la realización de cálculos simbólicos, gráficos y numéricos.

En el caso de los objetos que se describirán en el trabajo están dentro de las funcionalidades 2 y 3. En cada uno, además de servir como calculadora para resolver el problema en cuestión, resolver una ecuación o un sistema de ecuaciones, calcular una integral, etc., permiten visualizar el proceso vinculando el cálculo numérico con los cuadros simbólico y gráfico.

Se tuvo en cuenta, además, de acuerdo con Allan et al (2017) que para el diseño de un objeto de aprendizaje se debe tener presente con respecto al software educativo las características no tecnológicas y de interacción con el estudiante, también las de carácter pedagógico. En el caso de la selección de las actividades a desarrollar en el proceso de enseñanza aprendizaje deben escogerse las que propicien el aprender haciendo y de forma colaborativa.

Objeto para la teoría de errores

El objeto diseñado permite interactuar con la longitud de una cerca, aproximar su longitud y visualizar el resultado del error en esa aproximación. Permite afianzar el concepto de error y facilitar su comprensión. La manera de interactuar es moviendo el punto en rojo colocándolo en una posición escogida y por apreciación estimar la longitud del muro o cerca escribiendo la cifra en la caja de entrada correspondiente. Posteriormente el estudiante puede visualizar los valores calculados del error absoluto y del error relativo y cómo fueron calculados.



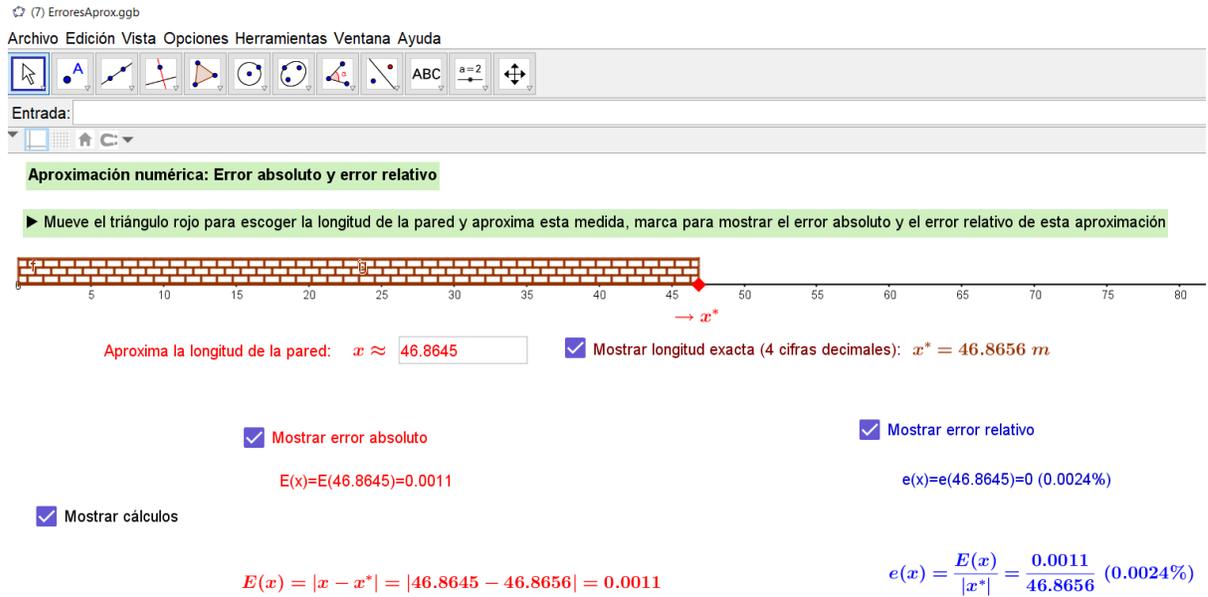


Figura 1. Errores absoluto y relativo.

Objeto para el método de Jacobi

Permite interactuar con los elementos del algoritmo de Jacobi resolviendo numéricamente sistemas de ecuaciones lineales de tres ecuaciones y tres variables. Se introducen los coeficientes del sistema en cuestión, el objeto evalúa si se cumple la condición de convergencia y con un deslizador se visualizan las iteraciones hasta el número diez. El estudiante interactúa además con la determinación de norma correspondiente para calcular el error absoluto en cada iteración.



Resolución numérica de sistemas de ecuaciones lineales por el método de Jacobi

► Entra los coeficientes del sistema de 3x3 y con el deslizador recorre las iteraciones hasta 10.

4 $x_1 + (-1)$ $x_2 + 2$ $x_3 = -5$
 2 $x_1 + (-4)$ $x_2 + 1$ $x_3 = -13$
 3 $x_1 + 1$ $x_2 + 8$ $x_3 = 8$

⇒

$$\begin{cases} 4x_1 + (-1)x_2 + (2)x_3 = -5 \\ 2x_1 + (-4)x_2 + (1)x_3 = -13 \\ 3x_1 + (1)x_2 + (8)x_3 = 8 \end{cases}$$

Forma matricial del SEL

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & 1 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -13 \\ 8 \end{pmatrix}$$

La matriz es de diagonal estrictamente dominante: La convergencia está garantizada

► Utiliza el deslizador para correr las iteraciones

Ver solución "exacta":

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot b = \begin{pmatrix} 0.363 & -0.11 & -0.077 \\ 0.143 & -0.286 & 0 \\ -0.154 & 0.077 & 0.154 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 \\ -13 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Iteración = 1

$x_1^{(1)} = \frac{1}{4}(-5 - (-1)x_2^{(0)} - (2)x_3^{(0)}) = \frac{1}{4}(-5 - (-1) \cdot (0) - (2) \cdot 0) = -1.25$

Ecuaciones de iteración

$x_2^{(1)} = \frac{1}{-4}(-13 - (2)x_1^{(0)} - (1)x_3^{(0)}) = \frac{1}{-4}(-13 - (2) \cdot (0) - (1) \cdot (0)) = 3.25$

$x_3^{(1)} = \frac{1}{8}(8 - (3)x_1^{(0)} - (1)x_2^{(0)}) = \frac{1}{8}(8 - (3) \cdot (0) - (1) \cdot (0)) = 1$

Ecuación de iteración en forma matricial

$$x^{(k)} = Mx^{(k-1)} + c$$

$$\begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_3^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0.25 & -0.5 \\ 0.5 & 0 & 0.25 \\ -0.375 & -0.125 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1.25 \\ 3.25 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.25 \\ 3.25 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Solución aproximada: $x_1 = -1.25; x_2 = 3.25; x_3 = 1$

► Selecciona e introduce el valor correspondiente para cada iteración:

$\|x^{(1)} - x^{(0)}\| = \max \begin{pmatrix} 1.25 \\ 3.25 \\ 1 \end{pmatrix} = 3.25$

$E(x^{(1)}) = \frac{0.75}{1 - 0.75} \|x^{(1)} - x^{(0)}\| = 3.94.232 = 282.696$

Figura 2. Método de Jacobi

Objetos para los métodos de Bisección y de Newton-Raphson

En ambos casos se trata del problema de resolver una ecuación no lineal por los métodos de bisección que es de división del intervalo y de Newton-Raphson iterativo. Permiten interactuar con los elementos de cada método, en el caso de bisección visualizando el intervalo en cada paso y el que corresponde en el siguiente; en el de Newton-Raphson la recta tangente en cada iteración y la siguiente de manera que el estudiante puede conjeturar y prever el próximo resultado. En ambos se muestra la curva correspondiente a la función involucrada.



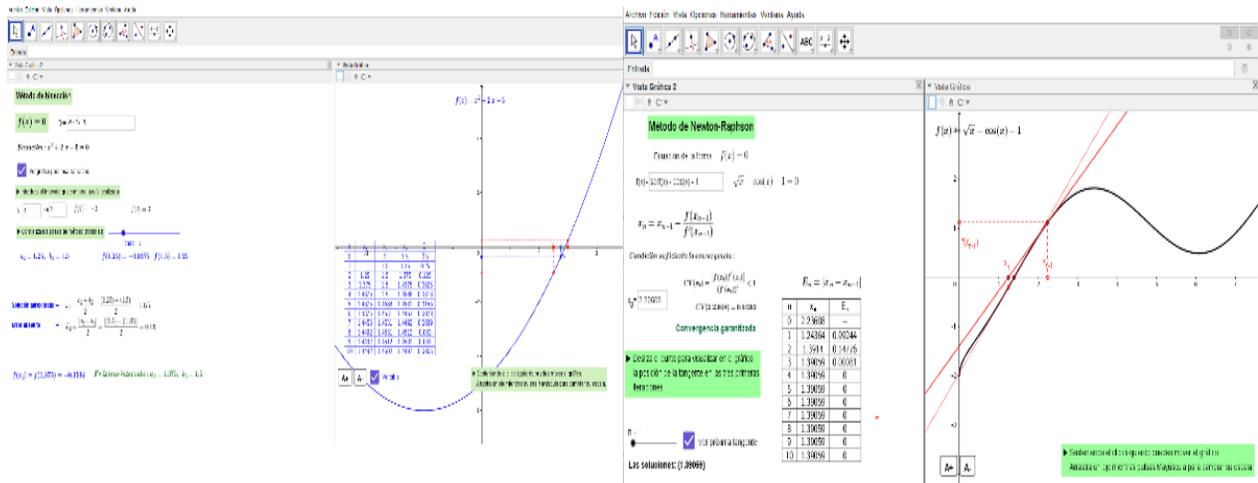


Figura 3. Método de bisección y Newton-Raphson

Objetos para la integración numérica

El objeto implementa los métodos del Punto medio; de los Trapecios y de Simpson, no solo permite interactuar con la función a integrar también con los elementos de cada método incluyendo los relacionados con el error mostrando por ejemplo los gráficos de la segunda y cuarta derivada según se demande.

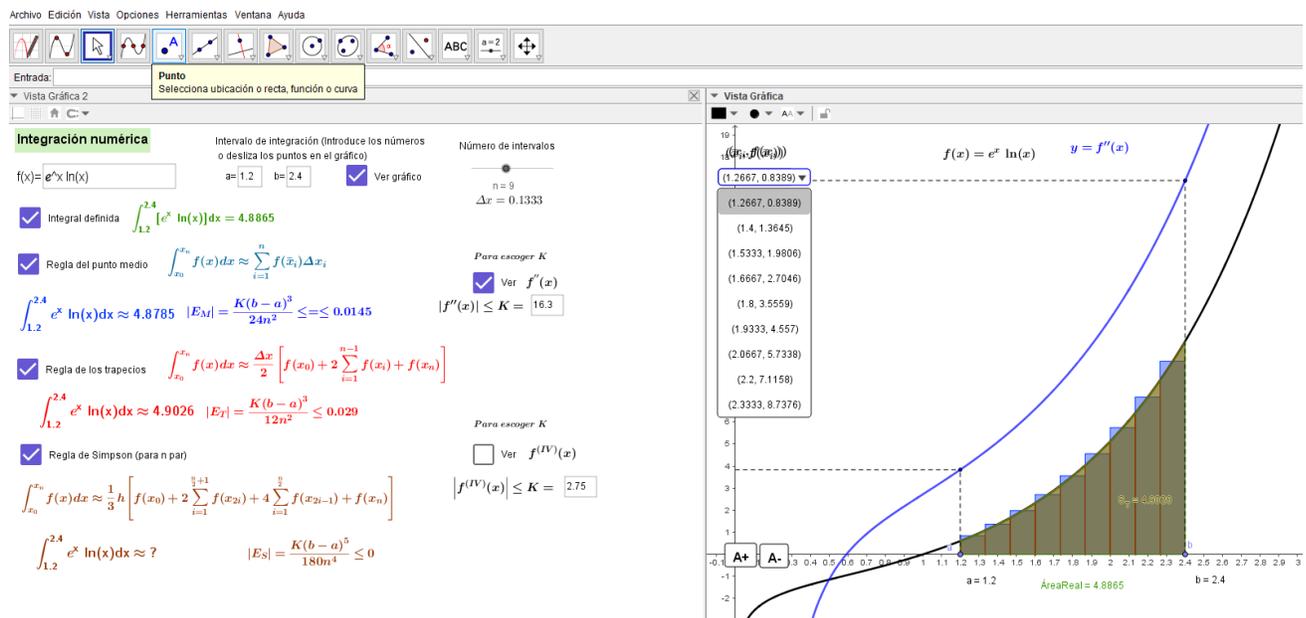


Figura 4: Integración numérica



Objetos para las ecuaciones diferenciales

El objeto implementa el método de Euler que es el básico para comprender el resto de los métodos de Runge-Kutta. Permite interactuar con los elementos del método y visualizar no solo la tabla de valores numéricos sino también la gráfica de la función solución y el polinomio correspondiente a la solución aproximada.

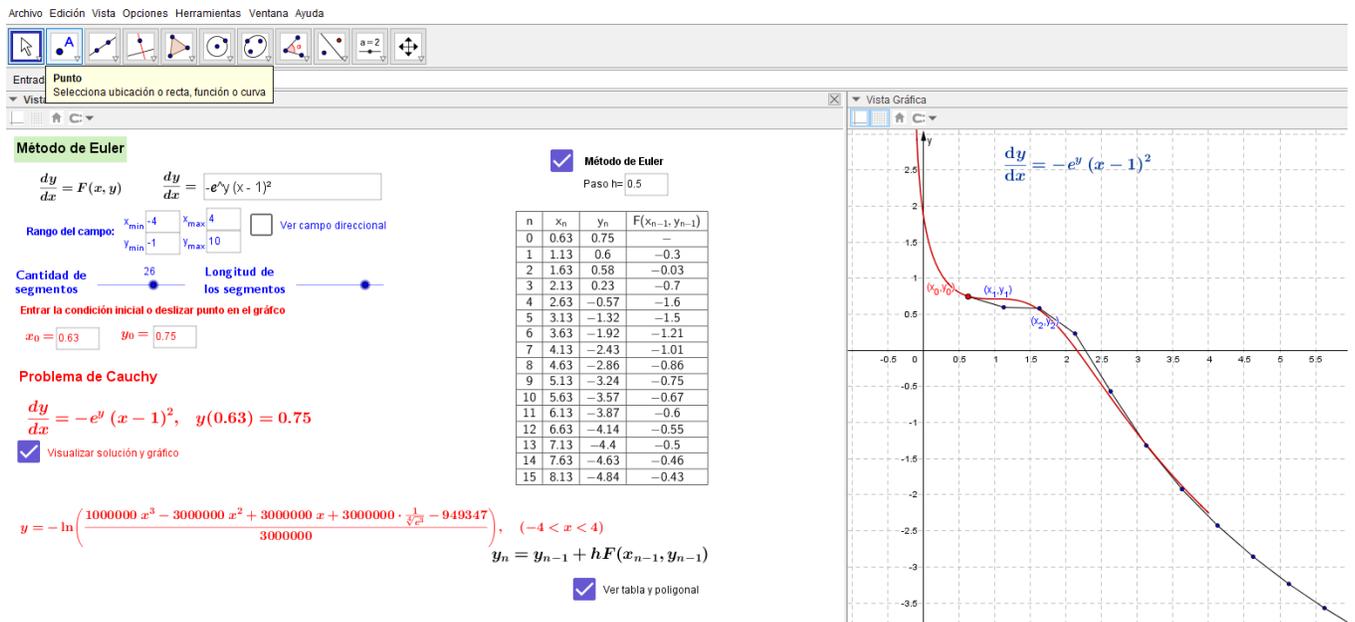


Figura 5. Método de Euler para ecuaciones diferenciales

Conclusiones

El diseño, creación e implementación de estos objetos, applets de Geogebra permitieron insertarlos en cada asignatura de la disciplina Matemática para el proceso de enseñanza aprendizaje de los métodos numéricos. Están siendo utilizados no solo en las clases presenciales, también para la realización de tareas independientes por parte de los estudiantes y como valor agregado constituyen para los profesores una muy útil herramienta para elaborar ejercicios y problemas sobre cada temática. El sistema de objetos está integrado a uno más amplio dentro de la disciplina que al momento de escribir este trabajo son cerca de un centenar, aunque están en constante perfeccionamiento y desarrollo, creando otros objetos nuevos o perfeccionando los que ya están en uso.

Todo este sistema de objetos creados con Geogebra forman parte de un proyecto más amplio de investigación en fase de validación después de estar siendo utilizados por más de tres cursos académicos y que han incidido positivamente



en la aceptación y resultados académicos de los estudiantes de la carrera de Ingeniería en Ciencias Informáticas de la Universidad Homónima de La Habana, Cuba.

Conflictos de intereses

Los autores no poseen conflictos de intereses.

Contribución de los autores

1. Conceptualización: Antonio rey Roque
2. Curación de datos: Antonio Rey Roque, Niurys Lázaro Álvarez, Tatiana Leyva Estrada
3. Análisis formal: Antonio Rey Roque, Niurys Lázaro Álvarez, Tatiana Leyva Estrada
4. Investigación: Antonio Rey Roque, Niurys Lázaro Álvarez, Tatiana Leyva Estrada
5. Metodología: Antonio Rey Roque
6. Administración del proyecto: Antonio Rey Roque
7. Software: Antonio Rey Roque
8. Supervisión: Antonio Rey Roque, Niurys Lázaro Álvarez, Tatiana Leyva Estrada
9. Validación: Antonio Rey Roque, Niurys Lázaro Álvarez, Tatiana Leyva Estrada
10. Visualización: Antonio Rey Roque, Niurys Lázaro Álvarez, Tatiana Leyva Estrada
11. Redacción – borrador original: Antonio Rey Roque, Niurys Lázaro Álvarez, Tatiana Leyva Estrada
12. Redacción – revisión y edición: Antonio Rey Roque, Niurys Lázaro Álvarez, Tatiana Leyva Estrada

Financiamiento

La investigación no requirió fuente de financiamiento externa.

Referencias

- Allan, C., Parra, S. y Martins, A. (2017). *Objetos de Aprendizaje para la Interpretación Geométrica de Métodos Numéricos: Uso de GeoGebra*. Revista Iberoamericana de Tecnología en Educación y Educación en Tecnología, (20), 51-56.
- Arteaga, E; Medina, J.F. y Del Sol Martínez, J.L. (2019). *El Geogebra: una herramienta tecnológica para aprender Matemática en la Secundaria Básica haciendo matemática*. Conrado, Cienfuegos, V. 15, No. 70, pp. 102-108.



- Ausubel, D., Novak J. y Hanesian H. (1997). *Psicología educativa. Un punto de vista cognitiva*. México. Trillas.
- Gil Vera, V. (2019). *Teaching of the Concept of the Derivative with Geogebra: A Didactic Guide from the Classroom*.
Revista Internacional de Aprendizaje en Ciencia, Matemáticas y Tecnología, 6(2), pp. 63-72.
- Goldenberg, P. (2003). *Las características de las mejores prácticas para enseñar matemáticas*.
<http://eduteka.icesi.edu.co/articulos/Tema19>.
- Gordillo Méndez, A., Barra Arias, E., y Quemada Vives, J. (2018). *Estimación de calidad de objetos de aprendizaje en repositorios de recursos educativos abiertos basada en las interacciones de los estudiantes*. Educación XX1, 21(1), 285-301.
- Novillo Maldonado, E; González Sánchez, J; Facuy Delgado, J. (2018). *Objetos digitales de aprendizaje. Herramientas pedagógicas para un proceso de enseñanza innovado*. (UTMACH). Machala. Ecuador, pp. 147-170.

