

## Aprovechamiento didáctico del GeoGebra en ejercicios sobre tangencias de una esfera y un cono: dos ejemplos

### Didactic use of the GeoGebra in exercises on tangencies of a sphere and a cone: two examples

Dr. C. Carlos Manuel Hernández Hechavarría,<sup>I</sup> M. Sc. Tamara Acosta Garrido,<sup>II</sup>

I. Universidad de Oriente, Cuba [carlosmhh@uo.edu.cu](mailto:carlosmhh@uo.edu.cu)

II. Universidad de Oriente, Cuba [tacosta@uo.edu.cu](mailto:tacosta@uo.edu.cu)

---

#### RESUMEN

El aprovechamiento didáctico del GeoGebra en ejercicios de diferentes áreas de la matemática y de la geometría en particular es un tema actual, en este artículo se aborda la tangencia entre cuerpos, específicamente entre una esfera y un cono, atendiendo a dificultades diagnosticadas en su enseñanza y aprendizaje. Partiendo de dos ejercicios apropiados y variantes de estos, se ofrecen argumentos que muestran la conveniencia de la utilización didáctica de opciones que poseen versiones actuales del GeoGebra para el tratamiento de este tipo de ejercicios. Los ejemplos y argumentos mostrados han contribuido al perfeccionamiento de la enseñanza aprendizaje de la matemática y la superación de docentes de las educaciones media y superior.

**Palabras clave:** didáctica, enseñanza de la matemática, geometría, métodos de enseñanza.

---

#### ABSTRACT

The didactic use of the GeoGebra in exercises of different areas of mathematics and geometry, in particular, is a current issue. This article aims at explaining the teaching of the tangency between bodies, specifically between a sphere and a cone, attending to diagnosed teaching and learning difficulties. It starts with the presentation of two suitable exercises and their corresponding variants to give arguments to prove the convenience of using didactic options suggested by the current versions of the GeoGebra. The examples and arguments shown have contributed to the improvement of the teaching of mathematics and the improvement of teachers of secondary and higher education.

**Keywords:** Didactics, mathematics instruction, geometry, teaching methods, teaching methods.

## INTRODUCCIÓN

En diversos informes de investigación puede constatarse la persistencia de dificultades en la enseñanza aprendizaje de la matemática y acciones desarrolladas para contribuir a erradicarlas, por ejemplo, en el curso Experiencias de avanzada en la mejora escolar desde la evaluación educativa (Torres, y otros, 2013) se exponen acciones de mejora, derivadas de estudios de investigación realizados desde la perspectiva de la evaluación educativa que contemplan la matemática y la geometría en particular.

Aunque la comunidad científica reconoce las ventajas que ofrecen los softwares de matemática dinámica para la enseñanza aprendizaje de la matemática, existen institutos GeoGebra en distintos países, proyectos y docentes con valiosas experiencias y propuestas, así como demandas epistemológicas y didácticas para la mejor utilización de dicho software. Acertadamente Carrillo de Albornoz afirmó que "por diversas razones GeoGebra se está convirtiendo en un recurso TIC casi imprescindible en el aula. A las posibilidades que ofrece, hay que añadir su sencillez para comenzar a utilizarlo y sobre todo su continuo desarrollo, que hacen que en cada una de las nuevas versiones que aparecen, ofrezca nuevas opciones que hacen aumentar aún más su potencia y eficacia" (2013, pág. 1).

En la práctica escolar pueden encontrarse múltiples dificultades, entre otras: centros escolares donde no se conoce la existencia y utilización de alguno de éstos, docentes con conocimientos muy escasos del software y, docentes que dominan en alguna medida el software, pero con pésima utilización didáctica. Entre los trabajos que reflejan los aspectos planteados anteriormente están los de Gutiérrez y Jaime (2015), Hernández (2017), Jiménez y Jiménez (2017).

A su vez se aprecia el reconocimiento de ventajas de este software por docentes en formación en distintos países, por ejemplo en Sánchez (2016), así como en Triana y Moreno (2013). Lo antes expuesto permite comprender la necesidad de realizar investigaciones y aportaciones que contribuyan a resolver problemas existentes. El propósito fundamental de este artículo es mostrar el aprovechamiento didáctico de algunas opciones que poseen versiones recientes del GeoGebra, como la 5.0.192.0-3D de 2016 y 5.0.412.0-d de 2017, para el tratamiento de ejercicios que involucren tangencias entre cuerpos, particularmente entre el cono y la esfera. El cumplimiento de este propósito contribuye al perfeccionamiento de la enseñanza de contenidos geométricos asociados a la determinación de puntos de tangencia y que, en general, son importantes en las educaciones media y superior.

## MÉTODOS

Los resultados que se exponen en este artículo emanan de investigaciones desarrolladas por el autor sobre la estimulación y desarrollo de la creatividad matemática en los escolares, matemática dinámica y el enfoque investigativo, en las cuales se aplicaron variados métodos teóricos y empíricos. Para la obtención de información acerca del aprovechamiento didáctico del GeoGebra se elaboraron instrumentos para fuentes orales, escritas y visuales.

Los resultados de encuestas y entrevistas, de la revisión de tesis doctorales, de maestría y artículos científicos y planes de clase, la observación de clases y preparaciones metodológicas evidenciaron múltiples dificultades, entre ellas el deficiente aprovechamiento didáctico del GeoGebra, y de aquí la necesidad de elaborar y socializar ejemplos con el empleo de versiones recientes del GeoGebra referidas en la sección anterior.

Para mostrar el aprovechamiento didáctico del software fueron elaborados ejercicios y soluciones que respondieran a dificultades diagnosticadas en escolares de las educaciones media y superior, docentes en formación y otros.

## RESULTADOS Y DISCUSIÓN

El GeoGebra es una herramienta poderosa para la resolución de ejercicios y problemas que merece estudios para su utilización con diversos fines didácticos, entre otros, para la sistematización y profundización, la racionalidad de las vías de solución, la estimulación y desarrollo de la creatividad; en este sentido resultan importantes las exigencias de los ejercicios, el aprovechamiento dinámico de las vistas 2D y 3D para búsqueda y desarrollo de vías de solución y la utilización conveniente de opciones constructivas que ofrece el software.

Aunque no es propósito en este artículo abordar explícitamente y con profundidad todos los aspectos antes mencionados, los ejercicios, soluciones y consideraciones didácticas reflejan indicadores cardinales y ejemplos para el aprovechamiento didáctico de potencialidades del GeoGebra con esos fines. Las particularidades o variantes de los ejercicios en cuanto a su formulación y solución con asistencia del software, demandan la realización de análisis e inferencias didácticas de los aspectos anteriores atendiendo a particularidades de los escolares y los procedimientos lógicos que utilizan, es decir, para su mejor introducción en la práctica escolar pueden ser objeto de nuevos abordajes desde diferentes aristas.

La amplia variedad de opciones del GeoGebra, su enriquecimiento y perfeccionamiento sistemático, impide un abordaje exhaustivo y totalizador en un solo artículo, mucho menos si se pretende un alto nivel de profundidad; no obstante, es posible ilustrar cómo emplearlos en la docencia. Los ejemplos que se presentarán corresponden a uno de los tipos de ejercicios geométricos con características dinámicas atendiendo a los puntos o elementos de la figura que generan la dinámica.

El referido tipo de ejercicio con asistencia del GeoGebra se define como ejercicio geométrico de construcción con exigencias dinámicas respecto a una cantidad determinada de puntos que generan dicha dinámica y los efectos que genera en uno o varios elementos esenciales de las figuras o cuerpos referidos en el enunciado del ejercicio. Dentro de este tipo de ejercicio es posible hacer distinciones o sub-clasificaciones atendiendo a la existencia de figuras, cuerpos u otros objetos geométricos fijos o que tienen una variación limitada con respecto a uno o varios elementos.

Ejercicio 1. Construye con asistencia del GeoGebra una esfera tangente interiormente a un cono cuya base se encuentre en el plano XY. El dinamismo de la figura debe obtenerse solamente a partir de dos puntos (A y B), A para variar el radio de la base del cono y B la altura del cono.

Como puede apreciarse, el ejercicio puede clasificarse como geométrico de construcción con exigencias dinámicas respecto a una cantidad determinada de puntos que generan dicha dinámica, en este caso dos puntos, que aluden a la transformación de dos elementos esenciales de uno de los cuerpos referidos en el enunciado, el cono; pero que evidentemente generan transformaciones en el otro, la esfera, para cumplir con la exigencia de tangencia entre ellos.

Mediante la solución que se presenta en la [tabla 1](#) y las tres primeras figuras se ilustra el aprovechamiento dinámico de las vistas 2D y 3D para búsqueda y desarrollo de vías de solución y la utilización conveniente opciones constructivas que ofrece el GeoGebra, en especial conocido el vértice, el centro y radio de la circunferencia base del cono

Tabla 1. Protocolo de construcción ejercicio 1

nº	Nombre	Descripción	Valor
1	Punto A(2, 0, 0)	Punto sobre EjeX	$A = (2, 0, 0)$
2	Punto A'(-2, 0, 0)	Simétrico de A por EjeY	$A' = (-2, 0, 0)$
3	Punto B(0, 0, 4)	Punto sobre EjeZ	$B = (0, 0, 4)$
4	Plano a	Plano que pasa por A, A', B	$a: y = 0$
5	Triángulo T	triángAAB Polígono A, A', B TtriángAAB =	8
5	Segmento b	Segmento [A, A']	$b = 4$
5	Segmento a1	Segmento [A', B] de Triángulo TtriángAAB	$a1 = 4.47$
5	Segmento a'	Segmento [B, A] de Triángulo TtriángAAB	$a' = 4.47$
6	Recta c	Bisectriz de A', A, B	$c: X = (2, 0, 0) + ? (-1.45, 0, 0.89)$
7	Punto C(0, 0, 1.24)	Punto de intersección de c, EjeZ	$C = (0, 0, 1.24)$
8	Recta d	Recta del espacio que pasa por C intersectando perpendicularmente a a'	$d: X = (0, 0, 1.24) + ? (-0.89, 0, -0.45)$
9	Punto D(1.11, 0, 1.79)	Punto de intersección de d, a'	$D = (1.11, 0, 1.79)$
10	Esfera e	Esfera a través de D con centro en C	$e: x^2 + y^2 + (z - 1.24)^2 = 1.53$
11	Punto E(0, 0, 0)	Punto de intersección de EjeZ, EjeY	$E = (0, 0, 0)$
12	Cono f	Cono(E, B, Distancia(E, A))	$f: 16.76$
12	Superficie h	Cono(E, B, Distancia(E, A))	$h: 28.1$
12	Circunferencia g	Cono(E, B, Distancia(E, A))	$g: X = (0, 0, 0) + (2 \cos(t), -2 \sin(t), 0)$

En el análisis del desarrollo de esta vía de solución por los alumnos tiene sentido preguntarse ¿por qué trazaron el plano que pasa por A, A', B con esta opción, ¿por qué no consideraron suficiente el trazado del triángulo determinado por estos puntos, sabiendo que están en el plano que lo contiene?, ¿por qué no consideraron suficiente el triángulo BEA y aplicaron conocimientos pensando en el cono como cuerpo de revolución, considerando al eje Z o al lado

BE como eje de rotación? No existe una única respuesta posible, pues las fases o pasos constructivos pueden obedecer a distintas razones, entre otras, a sus conocimientos y habilidades matemáticas generales y para la utilización del software, por ejemplo:

- Trazar el plano por A, A', B porque pensó primeramente en la intersección de ese plano con el cono y la circunferencia descrita, en este caso no consideró estos cuerpos a partir de revoluciones o rotaciones sobre un eje determinado, es decir, no utilizó otra vía porque con esta daba respuesta a las exigencias del problema.
- Porque consideraron que un punto más, como A', que es fijo y se obtiene de manera muy rápida, no afecta la racionalidad o esencia de la vía.
- Porque consideraron que el trazado del triángulo AA'B simplifica la visualización del cono.
- No utilizaron conocimientos pensando en el cono como cuerpo de revolución por desconocimiento.

Las razones antes expuestas permiten inferir la necesidad de que el docente realice un diagnóstico y trabajo diferenciado con los escolares y reflexione sobre el aprovechamiento de algún software apropiado que faciliten el proceso de enseñanza aprendizaje; con respecto al GeoGebra, nótese las ventajas del protocolo de construcción para estudiar vistas gráficas, sobre todo porque en determinadas posiciones, como las que se muestran en las [figuras 1 y 2](#) no se observan claramente determinadas letras u objetos, no obstante esta dificultad desaparece con la utilización del fichero GeoGebra pues se cambian las posiciones y se observa además la dinámica.

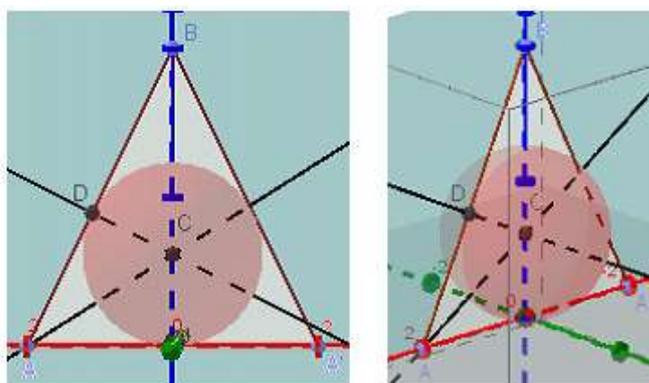


Figura 1. Posiciones favorables para identificar radio de la circunferencia y trazar cono

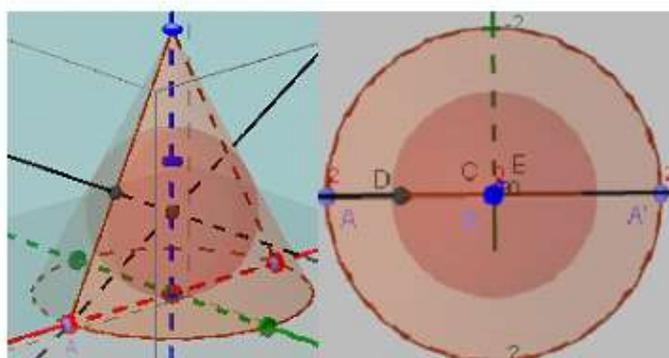


Figura 2. Dos vistas de la construcción

La [figura 3](#) muestra la construcción realizada ocultando algunos objetos a los cuáles no se hace referencia en el enunciado del ejercicio, tales como: rectas y el triángulo AA'B, el plano que pasa por estos puntos, es decir el plano  $y=0$ , los puntos A' y E. Además, se oculta, en la vista 3D, el plano XY que es un objeto referido en el enunciado, con el propósito de dirigir la

atención a relaciones entre el cono y la esfera; también para promover la utilización simultánea de esta vista 3D con la vista gráfica (que puede activarse desde el fichero GeoGebra) que muestra solamente la circunferencia base del cono en el plano XY. Se ilustra el efecto del cambio de color de la base del cono, en este caso, el contraste entre la superficie lateral y la base.

Lo antes expuesto refleja posibilidades, conveniencias y propósitos del ocultamiento de objetos en construcciones geométricas con asistencia del GeoGebra sin afectar observaciones y relaciones dinámicas esenciales o, afectándolas con vistas a promover la creatividad de los escolares u otros fines didácticos, también el uso de colores para distinguir partes de objetos geométricos.

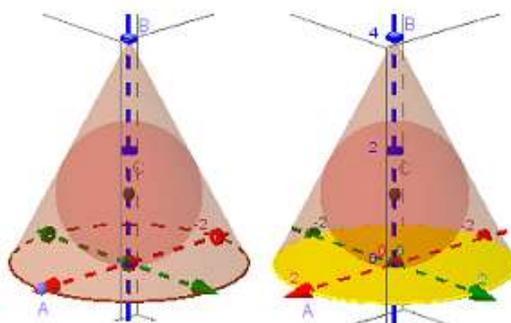


Figura 3. Sin mostrar rectas, planos, puntos y, resaltando contraste de colores

La vía anterior denota racionalidad con respecto a otras y un determinado orden constructivo respecto a los cuerpos involucrados, no obstante, la cantidad de variantes de solución respecto a estos y otros aspectos es grande; por ejemplo, la que se presenta mediante el protocolo de construcción en la [tabla 2](#), se desarrolla con menor número de puntos y pasos, además construye primero el cono. Cabe destacar que en la primera vía, aunque se traza primero la esfera, se reflejan consideraciones previas del cono, es decir integra aspectos conceptuales y procedimentales para la construcción de ambos cuerpos independientemente del orden en que aparecen.

Tabla 2. Protocolo de la segunda solución

nº	Nombre	Descripción	Valor
1	Punto A(2, 0, 0)	Punto sobre EjeX	$A = (2, 0, 0)$
2	Punto B(0, 0, 2)	Punto sobre EjeZ	$B = (0, 0, 2)$
3	Punto C(0, 0, 0)	Intersección de EjeY, EjeX	$C = (0, 0, 0)$
4	Cono a	Cono(C, B, Distancia(C, A))	a: 8.38
4	Superficie b	Cono(C, B, Distancia(C, A))	b: 17.77
4	Circunferencia c	Cono(C, B, Distancia(C, A))	c: $X = (0, 0, 0) + (2 \cos(t), -2 \sin(t), 0)$
5	Recta d	Bisectriz de B, A, C	d: $X = (2, 0, 0) + ? (-1.71, 0, 0.71)$
6	Punto D(0, 0, 0.83)	Punto de intersección de d, EjeZ	$D = (0, 0, 0.83)$
7	Esfera e	Esfera a través de C con centro en D	e: $x^2 + y^2 + (z - 0.83)^2 = 0.69$

Aunque las vías anteriores tienen diferencias, presentan algunas ideas comunes asociadas al trazado de la bisectriz para determinar el centro de la esfera, también cabe destacar que, aunque se sitúan por comodidad los puntos A y B sobre los ejes de coordenadas no resulta difícil situarlos en otras posiciones, por ejemplo el punto A en un punto cualquiera del plano sin cambiar el procedimiento pero no es una exigencia del ejercicio; no obstante es conveniente que el docente valore la necesidad de abordar este detalle en otros ejercicios o promover dicho análisis entre los escolares.

La posibilidad de que el profesor pueda plantear nuevas interrogantes y actividades investigativas escolares a partir de las soluciones que estos generan o pueden generarse con asistencia del GeoGebra es otro aspecto que merece atención didáctica. Por ejemplo, sobre este ejercicio pudieran promoverse indagaciones sobre relaciones entre las proyecciones de la esfera y el cono sobre el plano XY al variar uno de los puntos A y B; también plantearse incisos sobre la búsqueda de uno o varios casos particulares, dentro de los infinitos, que genera la construcción dinámica, por ejemplo, en este ejercicio, para que el área de la proyección de la esfera sobre el plano XY sea la mitad de la proyección del cono.

En este sentido resulta muy provechoso la utilización simultánea de las vistas 2D y 3D y la posibilidad de rotar la vista gráfica 3D para una mejor visualización de puntos, elementos de figuras o cuerpos, observar la tendencia de crecimiento de proyecciones y otros elementos para la búsqueda de ideas de solución que luego deben justificarse, también para que el docente atienda errores conceptuales y procedimentales de los escolares.

A continuación se presenta, a manera de ejemplo, un ejercicio y una solución que se distingue del primero por algunos conocimientos involucrados.

Ejercicio 2. Construye con asistencia del GeoGebra una esfera cuya intersección con el plano YZ sea la base de un cono cuyas generatrices sean tangentes a esta (a la circunferencia); el ángulo entre la altura del cono y sus generatrices de 30 grados. El dinamismo de la figura debe obtenerse solamente a partir un punto A sobre el eje X.

La construcción realizada se muestra en la [figura 4](#) y su protocolo de construcción en la tabla en la [tabla 3](#).

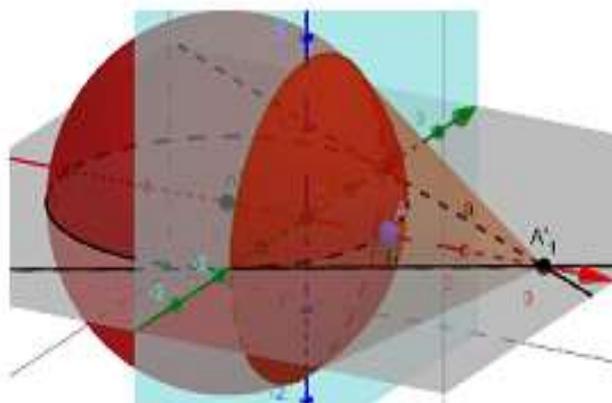


Figura 4.

Tabla 3. Protocolo de construcción ejercicio 2

nº	Nombre	Definición	Valor
1	Punto A	Punto sobre EjeX A =	(1, 0)
2	Punto A'	Simétrico de A por EjeY A' =	(-1, 0)
3	Punto A'1	Homotecia de A, de factor 2 desde A' A'1 =	(3, 0)
4	Circunferencia c	Circunferencia que pasa por A con centro A'	c: $(x + 1)^2 + y^2 = 4$
5	Recta a	Tangente a c que pasa por A'1	a: $-1.73x - 3y = -5.2$
5	Recta b	Tangente a c que pasa por A'1	b: $1.73x - 3y = 5.2$
6	Punto B	Punto de intersección de c, a B =	(0, 1.73)
7	Punto C	Punto de intersección de EjeZ, EjeX C =	(0, 0, 0)
8	Esfera d	Esfera a través de B con centro en A'	d: $(x + 1)^2 + y^2 + z^2 = 4$
9	Cono e	Cono[C, A'1, Distancia[C, B]]	e: 9.42
9	Superficie g	Lateral[e]	g: 18.85
9	Circunferencia f	Extremos[e]	f: $X = (0, 0, 0) + (0, 1.73 \cos(t), -1.73 \sin(t))$
10	Plano h	Plano que pasa por B y es perpendicular a EjeX	h: $x = 0$

Aunque, por razones de extensión, no se aborda con profundidad este segundo ejercicio y ofrecen variantes didácticas en cuanto a la formulación y solución, es fácil notar algunas diferencias entre este y el primero, por ejemplo, las exigencias referidas a la tangencia y ángulos en la formulación y la utilización de la homotecia en la vía de solución.

Quedan pendientes diversos aspectos didácticos, por ejemplo, si es posible y conveniente plantear exigencias constructivas con respecto al tipo de cono (recto, oblicuo o general) y los planos, revelar el aprovechamiento didáctico del protocolo de construcción para el diagnóstico, evaluación, estimulación para la utilización de determinados contenidos y otros propósitos.

Los ejemplos y argumentos mostrados forman parte de un amplio trabajo desarrollado con vistas al perfeccionamiento de la enseñanza aprendizaje de la matemática y la superación de docentes de las educaciones media y superior vinculados al proyecto "Sistematización de procesos de evaluación y mejoramiento educativo en Santiago de Cuba", fueron utilizados en un curso impartido a estudiantes de primer año de Arquitectura de la Universidad de Oriente en el primer semestre del curso escolar 2017-2018 y previstos para el desarrollo del curso optativo/electivo centralizado "Matemática con asistencia del GeoGebra".

Las opiniones de los escolares y docentes respecto a los ejemplos, argumentos y el software utilizado fueron satisfactorias, por ejemplo en los escolares fueron opiniones tales como "... permitieron obtener nuevos conocimientos", y "ofrecen procedimientos de solución"; mientras que los docentes referían que "es una herramienta poderosa para la enseñanza", "son

ejemplos muy interesantes", "sería bueno socializar otros", "son ejercicios diferentes a los que proponemos en clases" y "las consideraciones didácticas son muy necesarias".

## CONCLUSIONES

Los ejercicios, soluciones y argumentos expuestos revelan el aprovechamiento didáctico de opciones que poseen versiones recientes del GeoGebra para el tratamiento de ejercicios que involucren tangencias entre cuerpos, particularmente entre el cono y la esfera; de esta manera se contribuye al perfeccionamiento de la enseñanza de contenidos geométricos en las educaciones media y superior. Las variadas opciones ejemplificadas para la formulación y solución de ejercicios con asistencia del software reflejan su utilidad para la atención diferenciada a los escolares en correspondencia con sus conocimientos previos, necesidades, potencialidades, iniciativas y creatividad en sentido general, es decir, no se limitan a la utilización mecánica del software ni a los objetivos básicos de un programa que serán objeto de los exámenes formales.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Carrillo de Albornoz, A. (2013). *Otras matemáticas son posibles con GeoGebra*. Rio Grande do Sul: ULBRA. Recuperado el 19 de diciembre de 2017 de <http://www.conferencias.ulbra.br/index.php/ciem/vi/paper/view/2155/970>
- Gutiérrez, A., & Jaime, A. (2015). Análisis del aprendizaje de geometría espacial en un entorno de geometría dinámica 3-dimensional. *PNA*, 9(2), 53-83. Recuperado el 19 de diciembre de 2017 de <http://www.revistaseug.ugr.es/index.php/pna/article/download/6106/5425>
- Hernández, C. M. (2017). Ejercicios geométricos con exigencias de orden, movilidad y construcción con asistencia del GeoGebra: ejemplos y observaciones didácticas. *Revista Dilemas Contemporáneos: Educación, Política y Valores*, 4(3), 1-32. Recuperado el 19 de diciembre de 2017 de <https://www.dilemascontemporaneoseduccionpoliticayvalores.com/files/200003477-e4806e578f/17-5-8%20Ejercicios%20geom%C3%A9tricos%20con%20exigencias.....pdf>
- Jiménez, J., & Jiménez, S. (2017). GeoGebra, una propuesta para innovar el proceso enseñanza-aprendizaje en matemáticas. *Revista electrónica sobre tecnología, educación y sociedad*, 4(7), 4-12. Recuperado el 19 de diciembre de 2017 de <http://www.ctes.org.mx/index.php/ctes/article/download/654/736>
- Sánchez, D. D. (2016). *Metodología didáctica para la enseñanza activa en el proceso de graficar funciones*. Repositorio Digital de la Universidad Técnica de Machala. Recuperado el 19 de diciembre de 2017 de <http://www.repositorio.utmachala.edu.ec/handle/48000/9711>
- Torres, P., León, T., García, M. A., Fernández, C. L., Hernández, C. M., & Mariño, T. (2013). Experiencias de avanzada en la mejora escolar desde la evaluación educativa. Curso 3. *Pedagogía 2013*. (págs. 1-62). Ciudad de la Habana: Sello Editor Educación Cubana. Recuperado el 19 de diciembre de 2017 de

[http://www.cubaeduca.cu/media/www.cubaeduca.cu/medias/pdf/pedagogia\\_2013/Curso%2003.pdf](http://www.cubaeduca.cu/media/www.cubaeduca.cu/medias/pdf/pedagogia_2013/Curso%2003.pdf)

Triana, J., & Moreno, M. A. (2013). *Una propuesta de enseñanza para la solución de inecuaciones por el método gráfico, a través del software GeoGebra*. Repositorio Institucional de la Universidad Pedagógica Nacional de Bogotá. Recuperado el 19 de diciembre de 2017 de <http://www.repositorio.pedagogica.edu.co/handle/123456789/841>

Recibido: enero 2018

Aprobado: marzo 2018

*Hernández Hechevarría* es Licenciado en Matemática, Máster en Ciencias de la Educación, Doctor en Ciencias Pedagógicas y Profesor Titular. Posee experiencia laboral e investigativa en las educaciones Primaria, Media y Superior, la formación y superación de docentes. Ha participado en proyectos de investigación territoriales, institucionales, asociados a programas nacionales en Cuba y otros desarrollados en México.