

Estudio del proceso de génesis instrumental del artefacto simbólico función exponencial

Study of the process of instrumental genesis of the symbolic artifact for the exponential function

M. Sc. Daysi Julissa García Cuéllar,^I M. Sc. Mihály André Martínez Miraval,^{II}

I. Universidad San Ignacio de Loyola, Perú daysi.garcia@usil.pe

II. Pontificia Universidad Católica del Perú, Perú martinez.ma@pucp.edu.pe

RESUMEN

El presente artículo muestra un estudio de la función exponencial en estudiantes del primer semestre de una universidad privada de Lima, Perú. Esta investigación tuvo como objetivo analizar el proceso de la Génesis Instrumental de dicho objeto matemático mediado por el Geogebra. Para el análisis se usó como marco teórico el Enfoque Instrumental de Rabardel y como metodología, algunos aspectos de la Ingeniería didáctica de Artigue, centrándose en el análisis a priori y a posteriori. Las acciones de los estudiantes permitieron identificar esquemas de utilización que construyeron y movilizaron, mientras interactuaban con el artefacto simbólico función exponencial. El uso del Geogebra favoreció la instrumentalización e instrumentación del objeto matemático abordado ya que permitió que los estudiantes validaran sus conjeturas.

Palabras clave: Instrucción matemática, conceptos matemáticos, álgebra, didáctica.

ABSTRACT

This article describes a study of the exponential function on students of the first semester of a private University in Lima, Peru. The research was aimed at analyzing the Instrumental genesis process of this mathematical object assisted by the use of Geogebra software. Rabardel's Instrumental Approach was used as a theoretical framework. Likewise, some notions of Artigue's Didactic Engineering were used as a methodology, focusing on a priori and a posteriori analysis. The students' answers allowed to identify the use of schemes built and activated, while interacting with the symbolic artifact for the exponential function. The use of Geogebra favored the instrumentalization and instrumentation of the addressed mathematical object since it allowed the students to validate their conjectures.

Keywords: Mathematics instruction, mathematical concepts, algebra, didactics.

INTRODUCCIÓN

Diversas investigaciones en el campo de la Matemática Educativa, muestran la necesidad de realizar estudios sobre funciones, pues se evidencian dificultades en el aprendizaje de este objeto matemático (Tabach & NachielI, 2015; Viirman, 2014), de forma que es necesario reconsiderar los procesos de enseñanza y aprendizaje para dicha noción.

El estudio de la función exponencial es importante dado que forma parte del currículo peruano en los distintos niveles educativos, tanto en educación básica como universitaria. En el Diseño Curricular Nacional (DCN), dado por el Ministerio de Educación del Perú, se sugiere trabajar la función exponencial en quinto grado de secundaria mediante gráficas y modelos exponenciales; y trabajar ecuaciones exponenciales en cuarto de secundaria. Por otro lado, a nivel universitario, el tema función exponencial se enseña en los cursos de pre-cálculo o fundamentos del cálculo de la mayoría de carreras: administración, ingeniería, medicina, etc., con aplicaciones en crecimiento exponencial, depreciación, tasas de interés, entre otros.

Sureda (2012) señala que la relevancia en su estudio se da por la marcada relación entre la modelización de situaciones relacionadas a dicha función y la realidad que viven las personas, por ejemplo, se puede modelar con funciones exponenciales no complejas el incremento del dinero colocado en entidades financieras a un interés compuesto, el crecimiento de la deuda de una tarjeta de crédito, etc.; así como también se pueden modelar los casos de pandemia del virus de la gripe A (H1N1) y del brote del cólera en Haití, pero con funciones exponenciales más o menos complejas.

Las dificultades que presenta conceptualizar las funciones exponenciales en el proceso de enseñanza y aprendizaje han sido advertidas por diferentes profesores e investigadores. Entre ellos Greivin, e.t al. (2010, citado por Sureda, 2012) indica que existe un predominio del uso de modelos lineales al resolver problemas exponenciales, y que no se emplean correctamente las propiedades de las potencias por el poco conocimiento de las mismas; Angulo y Viscarra (2012) señalan que existen deficiencias al momento de graficar las funciones: al determinar los interceptos con los ejes coordenados, que no se interseque la gráfica con la asíntota horizontal, el uso adecuado de una escala, etc.; también al momento de interpretar los parámetros de la función tales como: base y monotonía, asíntotas, tendencias, etc.; y al momento de analizar modelos matemáticos concretos, por ejemplo, al captar que la función presenta una cota superior o inferior, fijadas por la asíntota, al trabajar con curvas de aprendizaje o curvas de depreciación, o al analizar el valor al que tiende una expresión exponencial cuando la variable crece indefinidamente, etc.; Velásquez (2014) indica que el aprendizaje de la función exponencial no es fácil para los estudiantes y las dificultades observadas se relacionan con las diferentes representaciones, en particular la gráfica y la algebraica.

Existen investigaciones que recomiendan el uso de las tecnologías en la enseñanza y aprendizaje de conceptos matemáticos (Flecknoe, 2002; Hannafin, Hall, Land & Hill, 1994; Harris, 2002), donde manifiestan revisar propuestas que consideren el papel de los artefactos en el aprendizaje. Es por ello, que utilizamos el software Geogebra para la creación de la secuencia didáctica de nuestro estudio, lo cual analizaremos usamos como marco teórico el Enfoque Instrumental.

Por lo anterior, el objetivo de la investigación fue analizar el proceso de génesis instrumental de la función exponencial considerando la instrumentalización e instrumentación de dicho objeto matemático cuando se interactúa con el software Geogebra en estudiantes de los primeros ciclos de una universidad de Lima, Perú.

MÉTODOS

Para el logro del objetivo se desarrolló un proceso de investigación desde el Enfoque Instrumental de Rabardel (1995) y se asumen como metodología nociones y aspectos de la Ingeniería didáctica. Según Artigue, Douady, Moreno & Gómez (1995), la Ingeniería didáctica es un esquema experimental basado en las "realizaciones didácticas" en clase, es decir, sobre la concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza.

Los autores sostienen que la Ingeniería didáctica se ubica en el registro de los estudios de casos, cuya validación es en esencia interna, basada en las confrontaciones entre el análisis a priori y a posteriori.

El Enfoque Instrumental, por su parte aborda la dimensión tecnológica de la educación matemática, articulando los aspectos importantes de la integración tecnológica en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Las nociones básicas de este enfoque, asumidas en la investigación, son las siguientes:

Artefacto: Puede entenderse como un objeto susceptible de su uso, elaborado para inscribirse en actividades intencionales. Puede ser material o simbólico.

Esquema: Es una organización invariante de la conducta del sujeto para una clase determinada de situaciones.

Instrumento: Es lo que un sujeto construye a partir del artefacto; es entonces una entidad mixta que contiene a la vez un artefacto, material o no, y esquemas de utilización contruidos por el sujeto durante su interacción.

De igual forma, en el estudio se asume la idea de Rabardel (1995) según la cual, el Enfoque Instrumental estudia la diferencia que existe entre el artefacto, el instrumento y los procesos que desenvuelven la transformación progresiva del artefacto en instrumento (transformación que denominó como proceso de génesis instrumental). Rabardel considera tres polos importantes en la génesis instrumental, estos son: el sujeto, que puede ser un usuario, operario, trabajador o agente; el instrumento, que se refiere a herramientas, máquinas, sistemas, utensilio, etc.; y el objeto, al cual va dirigida la acción con ayuda del instrumento, este puede ser la materia prima, objeto de la actividad o trabajo.

Rabardel sostiene que el instrumento no existe en sí, sino que es el resultado de asociar el artefacto a la acción del sujeto, como medio para la misma. En este estudio el artefacto simbólico es la función exponencial, que pasa al estado de instrumento, cuando el sujeto le asigna los esquemas de utilización correspondientes.

En cuanto a la génesis instrumental, esta consta de dos dimensiones: La instrumentalización y la instrumentación. La instrumentalización está dirigida hacia la parte artefactual del instrumento, consta del enriquecimiento de las propiedades del artefacto por parte del sujeto.

Es decir, es el resultado de la atribución de una función al artefacto por parte del sujeto. Mientras que, la instrumentación está dirigida hacia el sujeto. Se refiere a la construcción de esquemas de uso por parte del sujeto, relativos a la ejecución de ciertas tareas. En este proceso se lleva a cabo la asimilación de nuevos artefactos a los esquemas y la acomodación de los esquemas para dar nuevos significados a los artefactos.

El enfoque instrumental asumido en el estudio toma en cuenta además la noción de esquema de Vergnaud (1996), para este último un esquema es una organización invariante de la actividad para una clase de situación dada y consta de cuatro componentes: 1) Un objetivo, sub-objetivo y anticipaciones, 2) Reglas de acción, formada de informaciones y control, 3) Invariantes operatorios (reglas de acción y teoremas en acción), y 4) posibilidades de inferencias en una situación.

La parte experimental se realizó en dos encuentros en una sala de cómputo con 11 estudiantes de una universidad privada de Lima, Perú, de la carrera de administración, matriculados en el curso de Matemática Básica, que voluntariamente decidieron participar de la investigación.

El primer encuentro se centró en la actividad N° 1 que se enfoca en la instrumentalización de la función exponencial, es decir, del enriquecimiento de las propiedades y características del artefacto simbólico (función exponencial), y en el segundo encuentro, se dio énfasis a la instrumentación de nuestro artefacto con el desarrollo de la actividad N° 2.

Para la realización de las actividades, cada estudiante contaba con fichas de trabajo y una computadora donde se instaló previamente el software Geogebra que según García-Cuéllar y Salazar (2017), es un ambiente que ofrece una amplia variedad de opciones para desarrollar contenidos no solo de geometría sino también de álgebra, análisis y estadística.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

A continuación, se presenta el análisis a priori y a posteriori de las dos actividades propuestas, considerando los resultados de uno de los estudiantes que participó en la parte experimental y que se nombró Miguel. Usamos los resultados de Miguel porque es uno de los estudiantes que aseguró no haber estudiado antes la función exponencial, es decir, dicho objeto matemático es un artefacto para él.

Actividad 1

Esta actividad tiene como objetivo identificar el papel que cumplen los parámetros a y b , en la función de la forma $f(x)=a^x + b$, reconociendo algunas características de dicha función. Los estudiantes tenían que abrir un applet en Geogebra ([Figura 1](#)) para movilizar los parámetros a y b mediante el uso de deslizadores.

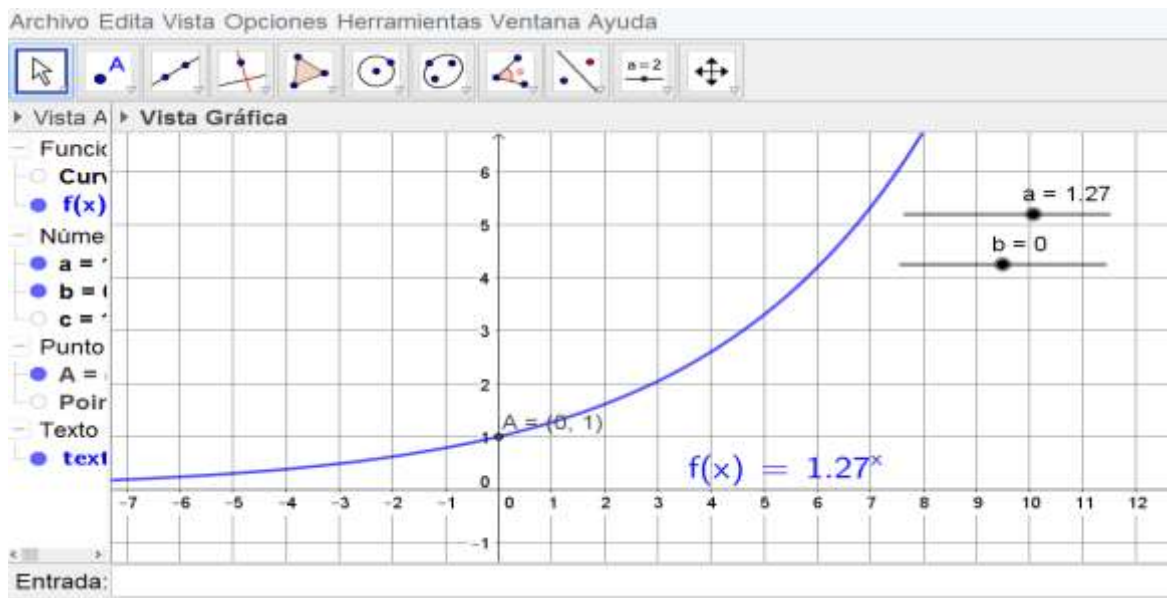


Figura 1. Applet en Geogebra de la primera actividad

A priori se consideró que los estudiantes al movilizar los deslizadores reconozcan que cuando $0 < a < 1$ la función es decreciente y cuando $a > 1$ la función es creciente, para ello deben movilizar los esquemas de uso de función, función creciente y decreciente, traslación de funciones, dominio y rango.

A continuación se muestran las respuestas de Miguel en su ficha de trabajo de la primera actividad, donde se evidencia que movilizó esquemas preexistentes de función creciente y decreciente:

Abra el archivo ACT_1.ggb y manipule los deslizadores a y b , los cuales transforman la gráfica de la función $f(x) = a^x + b$, con $a > 0$.

a. Fije $b = 0$. Para cada uno de los casos, indique si la función f es creciente, decreciente o constante:

$0 < a < 1$: La función es decreciente.

$a = 1$: La función es constante.

$a > 1$: La función es creciente.

Indique si las siguientes funciones son crecientes o decrecientes.

$f(x) = 4^x$: La función es creciente.

$f(x) = (1/5)^x$: La función es decreciente.

b. ¿Existe algún valor de x que haga que la función $f(x) = 2^x$ tome el valor 0? Explique.

Según el gráfico del Geogebra parece que si toma el valor de 0 pero al usar la herramienta Zoom me di cuenta que no lo toma.

A partir de las respuestas de Miguel para poder hacer una mejor interpretación se entrevistó al estudiante.

- Investigador: ¿Por qué $f(x) = 4^x$ es una función creciente?
- Miguel: Porque me di cuenta que al movilizar los deslizadores en valores mayores que uno la gráfica que resulta siempre es de una función creciente y como $a=4$ es mayor que uno, esa función es creciente.
- Investigador: ¿Cuándo $a=1$ que tipo de una función es f ?
- Miguel: Es una función constante
- Investigador: ¿Es una función exponencial?
- Miguel: No es una función exponencial, al menos su gráfica no es igual a las otras, es una recta horizontal.
- Investigador: En la pregunta b, ¿ $f(x) = 2^x$ toma el valor de cero?
- Miguel: Pareciera que sí, pero cuando usé la herramienta zoom del Geogebra me di cuenta que no toma el valor, la gráfica se acerca al valor.
- Investigador: ¿Qué sucede con la gráfica cuando varías los valores de b ?
- Miguel: Cuando moví el deslizador b , me di cuenta que la función se mueve hacia arriba, cuando b es positivo y hacia abajo, cuando b es negativo. Es decir, se mueve arriba y abajo (verticalmente)
- Investigador: ¿ $f(x) = 2^x + 1$ toma el valor de 1?
- Miguel: No, [usando el Geogebra] usando el zoom no toma 1, es una asíntota, es decir, se acerca al valor, pero nunca lo toma.

De lo anterior, se puede evidenciar a posteriori que Miguel movilizó esquemas preexistentes de función, función creciente y decreciente; así como esquemas de acción instrumentada como "la base de la función exponencial no puede tomar el valor de uno", "la función exponencial es decreciente si su base toma los valores entre 0 y 1", "la función exponencial es creciente si su base tiene un valor mayor que uno" y "el parámetro b es una asíntota horizontal".

Actividad 2

Esta actividad tuvo como objetivo que los estudiantes instrumentalicen la función exponencial en una situación dada. Es decir, que a partir de los esquemas de acción instrumentada, generen nuevos esquemas de utilización para una determinada situación.

A priori, se espera que los estudiantes modelen la regla de correspondencia de una función a partir de la información brindada, para ello deben movilizar el esquema de acción instrumentada de función exponencial.

Preguntas de la Actividad 2

Población de canguros en Australia

La población de canguros aumenta exponencialmente en algunas de las regiones de Australia, lo cual genera un daño en los cultivos y en las cercas de las granjas, debido a la competencia de estos con el ganado doméstico por conseguir agua y comida para sobrevivir. Se realizó un estudio en el año 2014, sobre la población de canguros de dos pequeñas regiones de Australia, que llamaremos región A y región B. En la región A no se tomaron medidas radicales para evitar la superpoblación de canguros, de modo que por año el número de canguros se duplicaba; caso contrario en la región B, donde sí se tomaron estas medidas

haciendo que el número de canguros se reduzca cada año a la mitad.

1. Se sabe que en el año 2014 hubo 10 canguros en la región A y 10240 canguros en la región B. Determine las funciones que modelan la población de canguros para cada una de las regiones en función al tiempo t , en años, que transcurren a partir del 2014.
2. Dibuje en el Geogebra las funciones que modelan la población de canguros de ambas regiones del año 2014 en año 2017. Justifique a partir de las reglas de correspondencia halladas porqué una de las gráficas es creciente y la otra decreciente.
3. Se sabe que en una región C de Australia se aplicó otro método para reducir la población de canguros y se modeló dicha población utilizando la siguiente función: $N(t) = 50000 \times (1/3)^t + 2000$, donde t son los años que transcurren a partir del 2014. ¿Se puede afirmar que si la tendencia continua, la región C de Australia terminará sin canguros? Justifique.

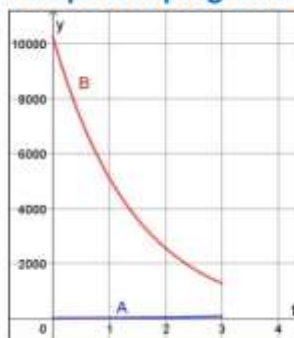
A posteriori, el estudiante Miguel en la pregunta 1 modela las funciones exponenciales que representan las regiones A y B como $A(t)=10 \cdot 2^t$ y $B(t)=10240 \cdot (1/2)^t$, respectivamente, haciendo uso de tablas. En la pregunta 2, Miguel usa el Geogebra para realizar la gráfica de las funciones A y B; para responder a la pregunta usa los esquemas "la función exponencial es decreciente si su base toma los valores entre 0 y 1", "la función exponencial es creciente si su base tiene un valor mayor que uno". En la pregunta 3, el estudiante moviliza el esquema de asíntota horizontal de una función.

En la [figura 2](#) se evidencian las respuestas de Miguel. Asimismo, por sus acciones, vemos que el estudiante instrumenta la función exponencial al poner en juego sus esquemas de utilización de dicho objeto matemático al resolver la situación dada.

Respuesta pregunta 1

Región A		Región B	
t	A	t	B
0	10	0	10240
1	$20 = 10 \times 2$	1	$10240 \times \frac{1}{2}$
2	$40 = 10 \times 2^2$	2	$10240 \times (\frac{1}{2})^2$
3	$80 = 10 \times 2^3$	3	$10240 \times (\frac{1}{2})^3$
$A(t) = 10 \cdot 2^t$		$B(t) = 10240 \cdot (\frac{1}{2})^t$	

Respuesta pregunta 2



Respuesta pregunta 3

NO porque la asíntota de la función es 2000, esto quiere decir que disminuirá hasta 2000, pero no toma ese número. Llegará a 2000 canguros.

La gráfica de la región A es creciente porque la base es igual a 2 y es mayor a 1.
La gráfica de la región B es decreciente porque la base es $\frac{1}{2}$ y es menor a 1 y mayor a 0.

Figura 2. Respuestas de Miguel en la actividad 2

De ambas actividades propuestas, se puede evidenciar que la instrumentalización de la función exponencial se basó en el reconocimiento de propiedades y características de dicho objeto matemático. La instrumentación, se basó en que por medio de una situación los estudiantes

movilicen sus esquemas de uso de dicha función. A partir de ambos procesos, podemos decir que Miguel ha instrumentalizado e instrumentado la función exponencial.

En general, las actividades trabajadas y en particular las actividades analizadas en el presente artículo, en la que se utilizó el software GeoGebra, favorecieron la transformación de artefacto a instrumento de la función exponencial. Es decir, que la posibilidad de observar la representación gráfica de la función en este ambiente dinámico permitió, de cierta forma, validar los conocimientos previos de los estudiantes.

CONCLUSIONES

La transformación del artefacto simbólico función exponencial en instrumento puede ser constatada cuando los estudiantes resuelven las actividades propuestas sobre el artefacto en estudio. El análisis realizado sobre la forma como fueron movilizados los esquemas de utilización permite verificar como se da el proceso de Génesis Instrumental.

Es importante destacar que en la Génesis instrumental, el estudiante maneja desde ya un repertorio de esquemas y que estos son acomodados o generalizados al nuevo artefacto para atribuirle un cambio de significado. Por ejemplo, en esta investigación, los esquemas como función y asíntota son parte del repertorio que movilizan los estudiantes para atribuirle un significado a la función exponencial.

En el estudio, se reconoció también que las herramientas del Geogebra facilitaron la instrumentalización de la función exponencial, pues cuando el estudiante movilizaba los deslizadores conjeturaba algunas propiedades y/o características de dicho objeto matemático. En general, las actividades mostradas en el presente artículo, en la que se hizo uso del GeoGebra, favorecieron la transformación de artefacto a instrumento. Es decir, que la posibilidad de observar la representación gráfica de función exponencial en este ambiente permitió validar los conocimientos previos de los estudiantes.

Cabe enfatizar que si bien algunas de las características señaladas del artefacto simbólico función exponencial fueron conservadas de manera durable para cierta clase de acciones, deben ser observadas en nuevas actividades para comprobar dicho nivel de instrumentalización.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Angulo, M., & Viscarra, R. (2012). Diseño e implementación de una propuesta pedagógica para la enseñanza de funciones exponenciales y logarítmicas. Tesis de Maestría inédita. Guayaquil: Escuela Superior Politécnica del Litoral. Recuperado el 18 de diciembre de 2017 de <http://www.dspace.espol.edu.ec/handle/123456789/24830>
- Artigue, M., Douady, R., Moreno, L., & Gomez, P. (1995). Ingeniería Didáctica en educación matemática: un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Bogotá: Grupo editorial Iberoamérica.

- Bellemain, F. B., & Trouche, L. (2016). Comprender o trabalho do professor com os recursos de seu ensino, um questionamento didático e informático. I Simpósio Latino-Americano de Didática da Matemática, Nov 2016. Bonito, Brasil. Recuperado el 18 de diciembre de 2017 de <https://www.hal.archives-ouvertes.fr/hal-01560233>
- Flecknoe, M. (2002). How can ICT help us to improve education? *Innovations in Education & Teaching International*, 39(4), 271-280. Recuperado el 18 de diciembre de 2017 de <https://doi.org/10.1080/13558000210161061>
- García-Cuéllar, D. , & Salazar, J. V. (2017). Un estudio de la instrumentación de la noción de simetría axial por medio del uso del Geogebra. *Revista do Instituto GeoGebra de São Paulo*, 6(1), 68-82. Recuperado el 18 de diciembre de 2017 de https://www.researchgate.net/publication/317433808_Un_estudio_de_la_instrumentacion_de_la_nocion_de_simetria_axial_por_medio_del_uso_del_Geogebraannafin
- Hall, M. J., Land, C., & Hill, J. (1994). Learning in open-ended environments: assumptions, methods and implications. *Educational Technology*, 34(8), 48-55. Recuperado el 18 de diciembre de 2017 de https://www.researchgate.net/publication/294698922_Learning_in_Open-Ended_Environments_Assumptions_Methods_and_Implications
- Harris, S. (2002). Innovative pedagogical practices using ICT in schools in England. *Journal of Computer Assisted Learning*, 18(4), 449-458. Recuperado el 18 de diciembre de 2017 de <https://doi.org/10.1046/j.0266-4909.2002.00256>
- Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies: Approche cognitive des instrumentns contemporains*. Paris: Armand Colin.
- Rabardel, P. (2002). *People and Technology: A cognitive approach to contemporary instruments*. (H. Wood, Trad.) Paris: Université de Paris.
- Rabardel, P. (2011). *Los Hombres y las Tecnologías: visión cognitiva de los instrumentos cognitivos*. (M. A. Gempeler, Trad.) Santander, Colombia: Universidad Industrial de Santander.
- Sureda, D. (2012). *Enseñanza de las funciones exponenciales en la escuela secundaria. Aspectos didácticos y cognitivos*. Tesis doctoral inédita. Buenos Aires: Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires.
- Tabach, M., & Nachlieli, T. (2015). Classroom engagement towards using definitions for developing mathematical objects: the case of function. *Educational Studies in Mathematics* (90), 163-187. Recuperado el 18 de diciembre de 2017 de <https://doi.org/10.1007/s10649-015-9624-0>
- Velásquez, F. (2014). *Creencias y una aproximación de la concepción de los profesores sobre el proceso de enseñanza y aprendizaje de la función exponencial en cursos de pre-cálculo*. Tesis de maestría inédita. Lima: Pontificia Universidad Católica del Perú. Recuperado el 18 de diciembre de 2017 de <http://www.tesis.pucp.edu.pe/repositorio/handle/123456789/5498>
- Vergnaud, G. (1996). A teoria dos campos conceptuais. En J. Brun (Ed.), *Didáctica das matemáticas* (págs. 155-189). Lisboa: Horizontes pedagógicos.

Viirman, O. (2014). The function concept and university mathematics teaching. Dissertation. Karlstad: Karlstad University, Faculty of Health, Science and Technology. Department of Mathematics and Computer Science. Recuperado el 18 de diciembre de 2017 de <http://www.diva-portal.org/smash/get/diva2:693890/fulltext01.pdf>

Recibido: enero 2018

Aprobado: abril 2018

García Cuéllar es Magíster en Enseñanza de las matemáticas y especialista en Didáctica de las matemáticas en la Pontificia Universidad Católica del Perú. En estos momentos se encuentra en proceso de formación para la obtención del grado Científico de Doctora en Educación Matemática en la Pontificia Universidade Católica de São Paulo.