Transformación, ISSN: 2077-2955, RNPS: 2098, mayo-agosto 2020, 16 (2), 275-291

Artículo

Ejemplificación de la aplicación del razonamiento inductivo-deductivo a la resolución de un problema matemático de demostración

Applying inductive-deductive reasoning to the resolution of a mathematical proof problem

Dr. C. Juan Álvarez Esteven[1*]. https://orcid.org/0000-0003-3666-1583

Dr. C. Isabel Alonso Berenguer[1]. https://orcid.org/0000-0002-3489-276X

Dr. C. Alexander Gorina Sánchez[1]. https://orcid.org/0000-0001-8752-885X

[1] Universidad de Oriente, Santiago de Cuba, Cuba

[*]Autor para la correspondencia (email) jalvarez@uo.edu.cu

RESUMEN

Objetivo: El artículo tiene por objetivo presentar una ejemplificación sobre la resolución de un problema matemático de demostración, utilizando un método didáctico creado por los propios autores, que se sustenta en el razonamiento inductivo-deductivo.

Métodos: La metodología empleada para desarrollar la investigación integró métodos cualitativos y cuantitativos, en una alternativa desarrolla por Álvarez, Alonso y Gorina (2018), que integra los procedimientos explorativo-inductivo, validativo-inductivo y demostrativo-deductivo.

Resultados: El estudio demostró que el método didáctico propuesto se distingue por hacer énfasis en la relación entre la formulación y la generalización inductivas de una conjetura matemática y su validación deductiva, connotando el carácter del razonamiento a desarrollar por los estudiantes en el citado proceso resolutor.

Conclusión: Se concluyó que el método didáctico ejemplificado influye positivamente en el desarrollo de habilidades resolutoras de problemas matemáticos de demostración.

Palabras clave: Enseñanza de la matemática, métodos de enseñanza, procedimientos, razonamiento inductivo-deductivo; resolución de problemas matemáticos.

ABSTRACT

Objective: The paper aims at illustrating mathematics problem solving through a method devised by the authors based on the inductive interpretation of the problem and on the inductive-deductive reasoning.

Methods: The methodology used to conduct the research combines qualitative and quantitative methods by means of an alternative developed by Álvarez, Alonso, & Gorina (2018) that integrates exploratory-inductive, validating-inductive and demonstrating-deducting procedures.

Results: The study proves that the devised method is distinguished by its emphasis on the relation between the interpretative statement, the inductive generalization of the speculated solution and its deductive validation

Conclusion: The authors arrived at the conclusion that the illustrated method positively influences the development of students' mathematical problem-solving skills.

Keywords: Mathematics instruction, teaching methods, teaching procedures, inductive-deductive reasoning; problems-solving.

Recibido: 13/01/2020

Aprobado: 5/02/2020

INTRODUCCIÓN

Las carreras de Licenciatura en Matemática y Licenciatura en Educación Matemática, que se estudian en Cuba tienen por objetivo la preparación de profesionales de perfil amplio, con modos de actuación relativos a la creación de nuevas teorías y métodos matemáticos, la aplicación de estos a la resolución de problemas que surgen en diversas esferas de la vida de la sociedad y la enseñanza de parte del acervo cultural acumulado por esta ciencia.

La creciente complejidad de los resultados matemáticos que se emplean actualmente para dar respuesta a las exigencias de la sociedad, demandan de una alta rigurosidad en el conocimiento de los estudiantes de estas carreras universitarias, encargados de aplicar y enseñar tales resultados. Esto conduce a la necesidad de prepararlos en el uso de métodos eficientes para la resolución de los problemas matemáticos que se les presentarán en su vida profesional (Álvarez, Alonso y Gorina, 2012).

Una profundización en la literatura sobre el tema permite comprobar que son numerosos los trabajos orientados al perfeccionamiento de la enseñanza y aprendizaje de la resolución de problemas matemáticos; entre los que pueden citarse: Almeida y Almeida (2017); Alonso (2001); Alonso, Gorina, Iglesias y Álvarez (2018); Blanco, Cárdenas y Caballero (2015); Pólya (1966); Schoenfeld (1985); Parra (2017); entre otros.

A pesar del interés existente por el estudio de esta temática, aún se observan dificultades en este proceso, esencialmente en lo relativo al aprendizaje de los problemas de demostración (Álvarez, Alonso y Salgado, 2016). Las causas de estas dificultades han sido analizadas en varias investigaciones, centradas en los procesos de demostración formal: D´Andrea y Sastre (2014); Gámez (2017); García (2016); Lara y Samper (2014); Larios (2015, 2018); Ron y Dreyfus (2004); con resultados que atribuyen las insuficiencias detectadas a carencias de habilidades de razonamiento, necesarias para llegar a comprender y realizar una demostración matemática formal.

Sin embargo, la generalidad de estos investigadores se queda solo a nivel del reconocimiento de esta problemática y la descripción del razonamiento a desarrollar en la resolución de dichos problemas, sin llegar a proponer soluciones didácticas, orientadas a caracterizar e implementar la lógica dinamizadora de dicho razonamiento, lo que se constituye en insuficiencia epistémica que se trata en el presente artículo (Álvarez, 2019).

En tal sentido, las perspectivas de análisis para abordar la didáctica de la resolución de problemas matemáticos de demostración se fundamentan en dos enfoques principales, el primero orientado a la enseñanza de la parte deductiva de la demostración, obviando el razonamiento inductivo previo a esta, y un segundo enfoque que defiende la necesidad de enseñar al estudiante a realizar un análisis inductivo que le facilite el avance hacia los procesos de demostración formales. El primer enfoque sigue siendo el más empleado hasta la actualidad, a pesar del poco éxito que proporciona.

Ahora bien, independientemente de que relevantes investigadores matemáticos de todos los tiempos hayan conferido capital importancia al razonamiento inductivo, se ha podido comprobar que este no está presente en la mayor parte de las demostraciones matemáticas que se han publicado a través del desarrollo histórico de esta ciencia. Los autores, en la generalidad de los casos, solo presentan la parte deductiva ya pulida, con lo que no transmiten patrones de análisis inductivo a sus lectores (Álvarez, 2010; Álvarez, Alonso, & Gorina (2018).

El segundo enfoque, defendido por Pólya (1966); Álvarez, Alonso & Gorina (2012); Gámez (2017); y Manrique y Soler (2014), asegura que el razonamiento inductivo debe ser introducido y trabajado como modo de actuación previa al deductivo, propio de los procesos de demostración formal. Se coincide con este enfoque en lo relativo a la consideración de que se debe partir de enseñar a razonar inductivamente; sin embargo, la mayoría de las estrategias que se proponen para llevarlo a cabo resultan muy generales, exponiendo el “que”, pero sin precisar suficientemente el “cómo”, por lo que se devela la necesidad de profundizar en los procesos de prueba fundamentados en lo empírico, así como en las generalizaciones y demostraciones necesarias para arribar a las soluciones, en aras de proporcionar a profesores y estudiantes procedimientos que los orienten en esta actividad.

Para suplir esta carencia teórica, se profundizó en la contradicción dialéctica que se manifiesta entre la exploración-validación inductiva de una conjetura y su resolución deductiva en un problema matemático de demostración; lo que sirvió de sustento para modelar la dinámica del razonamiento inductivo-deductivo en la resolución de los citados problemas, según se explicita en Álvarez, Alonso y Gorina (2019).

La modelación de esta dinámica condujo a definir tres dimensiones, las que son expresión de sus movimientos internos y permiten revelar la transformación de dicho proceso. Estas se denominan: explorativa-inductiva para la conjeturación matemática, validativa-inductiva de conjeturas matemáticas y la demostrativa-deductiva de conjeturas matemáticas.

Luego, a partir de la citada modelación, se elaboró un método didáctico que permite llevar a la práctica docente la mencionada dinámica. El mismo tiene como estructura operacional, un sistema de procedimientos didácticos, contentivo de acciones, criterios evaluativos y patrones de logro, que guían el desarrollo del razonamiento inductivo y deductivo durante la resolución de los citados problemas.

Este método didáctico fue uno de los aportes de la tesis doctoral del autor principal de este trabajo, ya defendida, y se introdujo en la carrera de Licenciatura en Matemática, de la Universidad de Oriente durante el curso 2018-2019, obteniéndose buenos resultados y evidenciándose transformaciones cualitativas y cuantitativas en el aprendizaje de los estudiantes.

A partir de todo lo anterior, el presente artículo se propone ejemplificar la resolución de un problema matemático de demostración, utilizando el método didáctico creado, con el objetivo de propiciar una mayor comprensión del mismo por parte de profesores e investigadores y evidenciar su factibilidad de aplicación.

MATERIALES Y/O MÉTODOS

La ejemplificación que se propone, sobre la resolución de un problema matemático de demostración, se lleva a cabo empleando el método didáctico creado por Álvarez, Alonso y Gorina (2018). Este método está estructurado en tres procedimientos que interactúan, dando lugar al establecimiento de relaciones de jerarquía y subordinación, a la vez que se aleja de la tendencia a asumir una metodología inductiva o deductiva independiente y explicitando sus resultados en la propia dinámica de su sistematización. Los tres procedimientos que constituyen su estructura operacional son, el explorativo-inductivo, el validativo-inductivo y el demostrativo-deductivo.

RESULTADOS

A continuación, se describen los procedimientos a emplear y la forma de actuar del profesor y los estudiantes. Para ello se toma, a manera de ilustración, el siguiente problema: Algunos números enteros positivos tienen una propiedad muy especial: se pueden escribir como la diferencia de dos cuadrados perfectos ¿Cuáles son esos números?

Procedimiento explorativo-inductivo

El profesor debe dar tiempo a que cada estudiante, de manera individual, trate de comprender el problema y enfatizar en que aprendan a identificar su estructura; es decir, las condiciones y exigencias, así como los objetos, características y relaciones que los componen. Para ello se pueden utilizar algunas preguntas como las siguientes: ¿Puedes explicar con tus propias palabras de qué trata el problema? ¿Qué componentes involucra este problema? ¿Cómo se relacionan los objetos del problema? ¿Cuáles son las condiciones y exigencias del problema? ¿Cómo te representas el problema? ¿Esta representación te sugiere alguna idea que quieras exponer? Este tipo de preguntas debe llevar a una idea hipotética que indique cuál pudiera ser la conjetura inicial.

Por su parte, el estudiante con su actuar deberá realizar una observación consciente de la estructura del problema e identificar las condiciones y exigencias que los componen, así como los objetos, características y relaciones contenidos en estas últimas. De manera que pueda llegar a identificar que los objetos matemáticos involucrados en el problema que está resolviendo son los números enteros positivos y las relaciones entre ellos está dada por la diferencia de sus cuadrados; llegando a plantear una representación de estos.

Así podrá precisar como condiciones que: los números son enteros positivos: $a \in Z^+$, se pueden escribir como la diferencia de dos cuadrados perfectos, es decir: $a = b^2 - c^2$. Y como exigencia: la determinación de esos números (a).

En un segundo momento, el profesor debe inducir la aplicación de alguna estrategia heurística que les permita realizar una adecuada exploración del problema. A tales efectos podría estimularse el ensayo con casos particulares, con un caso general, con todos los casos posibles o el uso de analogías, a fin de establecer conexiones que sospeche que existen entre los objetos que conforman el problema.

A partir de lo anterior, el estudiante deberá recuperar de su memoria estrategias heurísticas y metacognitivas, previamente aprendidas, para visualizar; identificar patrones, relaciones, regularidades y propiedades. De manera que si decide ensayar con casos particulares puede llegar a una secuencia de representaciones numéricas (Figura 1) del problema como la que se representa a continuación:

$1=1^2-0^2$

2 no es posible su representación

$3=2^2-1^2$

$4=2^2-0^2$

$5=32-22$

6 no es posible su representación

$7=4^2-3^2$

$8=3^2-1^2$

$9=5^2-4^2$

10 no es posible su representación

$11=6^2-5^2$

$12=4^2-2^2$

$13=7^2-6^2$

14 no es posible su representación

$15=4^2-1^2=8^2-7^2$

Fig. 1: Secuencia de representaciones numéricas

Luego, el profesor deberá inducir la concepción y enunciado de ideas hipotéticas a partir de la observación e interpretación de esas representaciones del problema y de las relaciones que se observan entre los objetos, para lo cual puede promover la exposición de ideas en voz alta y el debate de estas. Mientras que el estudiante tendrá que examinar y comparar las representaciones que ha logrado hacer, hasta descubrir regularidades que sean relevantes a los efectos de su solución. Exponer sus ideas y defenderlas ante el grupo. Finalmente podrá conjeturar que: *todo parece indicar que los números que no cumplen la condición, son de la forma* $(2+4k)$, $k \in \{0, 1,\dots\}$.

Procedimiento validativo-inductivo

El profesor mediante preguntas llevará a que sus estudiantes piensen en alguna forma de validar esa conjetura inicial, precisándoles que todavía no se trata de demostrar la conjetura, sino de probar inductivamente su validez o falsedad para nuevos casos. Puede hacer que expresen sus ideas, intercambien, debatan, reflexionen y argumenten acerca de ¿cómo hacerlo? ¿Qué otro resultado matemático pudiera emplearse para lograrlo? ¿Si pueden recordar algún caso análogo que hayan resuelto?

Del debate establecido, el estudiante podrá llegar a que una vía puede ser emplear el resultado matemático que expresa que la diferencia del cuadrado de dos números enteros positivos es igual al producto de la suma de ambos por su diferencia, que se representa de la siguiente forma: $a^2-b^2 = (a+b)(a-b)$.

De manera que podrán llegar a realizar una segunda representación de casos particulares (**Figura 2**), empleando este resultado matemático, como se muestra a continuación.

1= (1+0) (1-0) =1x1

2 no es posible su representación

3= (2+1) (2-1) =3x1

4= (2+0) (2-0) =2x2

5= (3+2) (3-2) =5x1

6 no es posible su representación

7= (4+3) (4-3) =7x1

8= (3+1) (3-1) =4x2

9= (5+4) (5-4) =9x1

10 no es posible su representación

11= (6+5) (6-5) =11x1

12= (4+2) (4-2) =6x2

13= (7+6) (7-6) =13x1

14 no es posible su representación

Fig. 2: Representación de casos particulares

A partir de esta representación, el profesor deberá propiciar la observación de la nueva representación del problema y la argumentación de la confirmación o refutación de la primera conjetura. En este caso se puede utilizar uno de los softwares recomendados para automatizar la fórmula de la diferencia de cuadrado y hacer numerosas entradas para reforzar la conjetura. Mientras que el estudiante, a través de su observación y del análisis colectivo, podrá concluir que: *la representación anterior parece indicar que los números que cumplen la condición se pueden expresar como el producto de dos números: (par x par) o (impar x impar)*. De donde es posible inferir que los números de la forma $(2+4k)$, $k \in \{0, 1,\ldots\}$ no tengan esta representación, con lo cual se confirma la conjetura inicial, quedando esta validada.

Procedimiento demostrativo deductivo

El profesor debe hacer ver a sus estudiantes que a partir del análisis anterior ya se tiene una conjetura validada inductivamente, la que debe demostrarse deductivamente. Pero ¿cómo hacerlo? ¿Qué métodos matemáticos pudieran servirnos? ¿Podemos aplicar un método de demostración directo? ¿Tal vez, un contraejemplo? ¿Podrá hacerse por contradicción?

Al estudiante debe quedarle claro que ahora se trata de demostrar que: *los números enteros positivos que no cumplen la condición de poderse escribir como la diferencia de dos cuadrados perfectos, son de la forma* $(2+4k)$, $k \in \{0, 1, 2,…\}$. También deberán llegar a la conclusión y argumentar el método que sería el más adecuado.

Si finalmente se decide a hacer la demostración por contradicción, el profesor tendrá que recordar en qué consiste este método y los estudiantes deberán entender que lo adecuado es partir de la consideración de un número par $p \in \{0, 1, 2,…\}$, para llevar a cabo la demostración. En este momento el profesor podrá inducir a los estudiantes a que conciban los cuatro casos posibles y, una vez precisados estos, se espera que se plante en el siguiente primer caso:

Caso 1: p no se puede representar de la forma $p=(a+b)(a-b)$, bajo las siguientes condiciones: a) a par y b impar, b) a impar y b par.

El profesor podrá preguntar ¿De qué suposición será conveniente partir en este caso? Mientras que el estudiante deberá suponer que se cumple a), luego: $(a+b)$ y $(a-b)$ son ambos impares, lo que implicará que $(a+b)\ (a-b)$sea impar y por lo tanto se llega a una contradicción. A partir de este resultado podrá concluir que p no se puede representar de la forma $p=(a+b)\ (a-b)$ si se cumple la condición a).

Aquí el profesor debe hacer notar que para la condición b) la demostración es análoga e inducirlos a realizar la conclusión general del caso 1. Mientras que el estudiante deberá concluir que, si p es par no se puede representar de la forma $p=(a+b)\ (a-b)$ bajo las condiciones a) y b). Y razonar cuál sería el planteamiento del próximo caso.

Caso 2: Sea p par, se debe demostrar que no se puede representar de la forma $p=(a+b)\ (a-b)$, siendo $p=2+4k$ y bajo las condiciones: c) a par y b par y d) a impar y b impar.

De nuevo el profesor podrá preguntar ¿De qué suposición será conveniente partir en este caso? A partir de lo cual al estudiante le corresponderá suponer que se cumple c), por lo que: $2+4k=(a+b)\ (a-b)$. Si a es par y b es par, entonces $a+b$ es par y se puede expresar como: $(a+b)=2m$, donde $m \in \{0, 1, 2,…\}$, de igual forma $(a-b)=2n$, donde $n \in \{0, 1, 2,…\}$; por tanto: $(2+4k)=2(1+2k)=2m.2n$, o bien $(1+2k)=2mn$. Entonces, como $1+2k$ es impar y $2mn$ es par, se llega a una contradicción.

En este momento el profesor hará notar que para la condición d) la demostración es análoga e inducirlos a realizar la conclusión general del caso 2. Lo que dará lugar a que el estudiante pueda concluir este segundo caso afirmando que, si *p* es par, los números de la forma 2+4k no se pueden expresar como (a+b) (a-b) bajo las condiciones c) y d). Y analizar el planteamiento del próximo caso.

Caso 3: Sea *p* par, debe demostrar que los números de la forma *p=4k, k=0, 1, 2, …* se pueden expresar como p=4k=(a+b) (a-b) bajo las condiciones c) y d).

El profesor puede iniciar su actuar al hacer notar que si *4k=(a+b) (a-b),* basta tomar *a+b=2k* y *a-b=2* para asegurar la existencia (observar que en el caso 2 se demostró que *a+b* y *a-b* son ambos pares). Esto debe hacer razonar al estudiante el caso que queda.

Caso 4: Sea ahora *p* impar, luego *p* se expresa de la forma *a+b*, basta tomar *a+b=p* y *a-b=1*, luego *a= (p+1)/2, p+1* es par, pues por hipótesis *p* es impar, por lo que $a \in \{0, 1, 2,…\}$, por tanto *b=a-1* $b \in \{0, 1, 2,…\}$, lo que demuestra que si *p* es impar se puede representar como *p=(a+b)(a-b).*

El estudiante debe notar que, si *p* es impar y tiene divisores, posee más de una representación, de ahí que haya demostrado la existencia para *p* impar cualquiera, sea primo o no.

Finalmente, corresponde al profesor inducir a una generalización de lo demostrado hasta aquí. Por lo que se espera que el estudiante concluya que los números enteros positivos que se pueden escribir como la diferencia de dos cuadrados perfectos son: $\{x \in N: x \ddagger (2 + 4k), k = 0, 1, 2,…\}$, o equivalentemente: $\{(x=2k+1)$ *o* $(x=4k), k = 0, 1, 2,…\}$.

Finalmente, el profesor comenta a los estudiantes que existen otras posibilidades de demostración de la conjetura encontrada, como por ejemplo utilizando las representaciones que aporta la *teoría de grupo*, que es un contenido del Álgebra que posteriormente recibirán en el currículo.

DISCUSIÓN

La forma de proceder en la ejemplificación del método didáctico, no puede interpretarse como la única forma de orientar la dinámica del razonamiento inductivo-deductivo en la resolución de problemas matemáticos de demostración. No obstante, ilustra un camino crítico que el profesor y el estudiante deben recorrer de forma sistematizada, para que este último logre identificar propiedades invariantes en representaciones de estos problemas, asimilar los métodos para la comprobación de la veracidad o falsedad de conjeturas matemáticas y apropiarse significativamente del proceder deductivo para la demostración de dichas conjeturas.

Es claro que introducir el razonamiento inductivo en la resolución de problemas matemáticos de demostración consume gran parte del tiempo disponible para la clase y exige un elevado esfuerzo por parte del profesor, que debe preparar cuidadosamente los problemas y luego conducir todo el proceso reflexivo de sus estudiantes, tarea que no siempre sale como se espera y hay que improvisar en clase.

Es mucho más cómoda, y por ello más usada, aquella forma de enseñar que solo considera la parte deductiva de la demostración, obviando el razonamiento inductivo previo a esta. Eso mismo ocurre con los libros de texto. Al respecto, en Morales (2008), se plantea que los matemáticos en la redacción final de una demostración, por razones absolutamente válidas, generalmente no hacen referencia a todos los elementos previos involucrados en la construcción de una conjetura demostrable (la heurística o algunos procesos inductivos e intuitivos). Este autor ejemplifica su aseveración con palabras del destacado matemático Karl Gauss que afirmaba respecto a sus demostraciones “cuando se construye un edificio no se dejan los andamios”, teniéndose como consecuencia que algunas demostraciones podrían resultar hasta cierto grado artificiosas.

Pero al descartar la explicación de la actividad inductiva durante el proceso de resolución de un problema matemático de demostración, se sesga la comprensión y, por tanto, el aprendizaje de los estudiantes, que solo ven la parte deductiva y no son capaces de apropiarse del método empleado.

La necesidad de trabajar el proceso inductivo ha quedado precisada en los estándares curriculares del National Council of Teacher of Mathematics, cuando afirman:

> “el razonamiento y la demostración matemáticos proporcionan modos potentes de desarrollar y codificar conocimientos sobre una amplia variedad de fenómenos (…) Los programas de enseñanza deberían capacitar a los estudiantes para reconocer el razonamiento y la demostración como aspectos fundamentales de la Matemática; formular e investigar conjeturas matemáticas; desarrollar y evaluar argumentos y demostraciones matemáticas; elegir y utilizar varios métodos de demostración” (citado por Álvarez, 2019, p. 5).

CONCLUSIONES

La práctica docente ha confirmado que, para enseñar a resolver problemas matemáticos de demostración, no basta con explicar al estudiante algunos ejemplos en la pizarra, sin instruirlo en la construcción de conjeturas. No se logra un aprendizaje significativo si se pretende que este reconstruya el proceso que previamente el profesor ha realizado. Y es que las demostraciones matemáticas tienen significado cuando constituyen un reto intelectual para el estudiante.

La ejemplificación del método didáctico, realizada a partir de un ejemplo que es ilustrativo del tipo de problema para el cual fue diseñado, posibilita lograr una comprensión detallada a profesores e investigadores sobre la aplicación de sus tres procedimientos y evidenciar su factibilidad de aplicación en la dinámica del razonamiento inductivo-deductivo que debe llevarse a cabo durante el proceso de enseñanza-aprendizaje de la resolución de los problemas matemáticos de demostración.

REFERENCIAS

Almeida, B., & Almeida, J. N. (2017). Comprender antes de resolver. *Atenas, 3*(39), 48-63. Acceso: 3/12/2019. Disponible en: https://atenas.reduniv.edu.cu/index.php/atenas/article/view/310/573

Alonso, I. (2001). *La resolución de problemas matemáticos. Una alternativa didáctica centrada en la representación*. Tesis doctoral inédita de doctorado. Santiago de Cuba: Universidad de Oriente. doi:10.13140/RG.2.2.27079.19362

Alonso, I., Gorina, A., Iglesias, N., & Álvarez, J. (2018). Pautas para implementar la enseñanza de la Matemática a través de la resolución de problemas. *Maestro y Sociedad, 3*(número especial), 66-81. Acceso: 3/12/2019. Disponible en: https://revistas.uo.edu.cu/index.php/MyS/article/view/3610

Álvarez, J. (2019). *Dinámica del razonamiento inductivo-deductivo para la resolución de problemas matemáticos de demostración en carreras de perfil matemático*. Tesis de doctoral inédita. Santiago de Cuba: Universidad de Oriente. Acceso: 3/12/2019. Disponible en: https://www.researchgate.net/publication/334094719_DINAMICA_DEL_RAZONAMIENTO_INDUCTIVO_DEDUCTIVO_PARA_LA_RESOLUCION_DE_PROBLEMAS_MATEMATICOS_DE_DEMOSTRACION_EN_CARRERAS

Álvarez, J., Alonso, I., & Gorina, A. (2018). Método didáctico para reforzar el razonamiento inductivo-deductivo en la resolución de problemas matemáticos de demostración. *Revista Electrónica Formación y Calidad Educativa REFCalE, 6*(2), 17-31. Acceso: 3/12/2019. Disponible en: https://refcale.uleam.edu.ec/index.php/refcale/article/view/2545/1597

Álvarez, J., Alonso, I., & Gorina, A. (2019). Enseñanza-aprendizaje del razonamiento inductivo-deductivo en la resolución de problemas matemáticos de demostración. *Revista Conrado, 15*(68), 249- 258. Acceso: 3/12/2019. Disponible en: http://scielo.sld.cu/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1990-86442019000300249

Álvarez, J., Alonso, I., & Salgado, A. (2016). Resolución de problemas matemáticos en la Licenciatura en Educación Matemática-Física. *Revista Electrónica Formación y Calidad Educativa (REFCalE), 4*(1), 67-82. Acceso: 3/12/2019. Disponible en: https://refcale.uleam.edu.ec/index.php/refcale/article/view/481/668

Álvarez, M. Y. (2010). *Dinámica del razonamiento inductivo en la resolución de problemas matemáticos. Una propuesta didáctica*. Tesis de maestría inédita. Santiago de Cuba:

Universidad de Oriente. Acceso: 3/12/2019. Disponible en: https://www.researchgate.net/publication/338631602_DINAMICA_DEL_RAZONAMIENTO_INDUCTIVO_EN_LA_RESOLUCION_DE_PROBLEMAS_MATEMATICOS_UNA_PROPUESTA_DIDACTICA

Álvarez, M. Y., Alonso, I., & Gorina, A. (2012). Dinámica del razonamiento inductivo en la resolución de problemas matemáticos. Una propuesta didáctica. En Flores, F. (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (págs. 625-634). México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C. Acceso: 3/12/2019. Disponible en: http://funes.uniandes.edu.co/4328/1/ÁlvarezDinamicaALME2012.pdf

Blanco, L. J., Cárdenas, J. A., & Caballero, A. (2015). *La resolución de problemas de matemáticas en la formación inicial de profesores de primaria*. Acceso: 3/12/2019. Disponible en:

http://dehesa.unex.es/bitstream/handle/10662/5241/978-84-606-9760-2.pdf?sequence=1&isAllowed=y

D´Andrea, R. E., & Sastre, P. (2014). ¿Cómo generar habilidad para demostrar? En Lestón, P. (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (págs. 471-479). México, D.F.: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. Acceso: 3/12/2019. Disponible en: http://funes.uniandes.edu.co/5437/1/D_andreaComoALME2014.pdf

Gámez, C. J. (2017). Aprendizaje de la demostración matemática en estudiantes de introducción al Álgebra del Instituto Pedagógico Rural Gervasio Rubio. *Dialéctica, 13*(2), 1-24. Acceso: 3/12/2019. Disponible en: http://revistas.upel.edu.ve/index.php/dialectica/article/view/6462/3675

García, R. R. (2016). *Modelo didáctico PIPAB para desarrollar la capacidad demostración matemática de los estudiantes universitarios en el cálculo diferencial en una Universidad de Lambayeque*. Tesis doctoral inédita. Lambayeque, Perú: Universidad César Vallejo. Acceso: 3/12/2019. Disponible en: http://repositorio.ucv.edu.pe/bitstream/handle/UCV/18834/gacia_ar.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Lara, L. F., & Samper, C. (2014). Un aporte a la caracterización del comportamiento argumental y racional cuando se aprende a demostrar. *Educación Matemática, 26*(1), 7- 40. Acceso: 3/12/2019. Disponible en: http://www.scielo.org.mx/pdf/ed/v26n1/v26n1a2.pdf

Larios, V. (2015). La construcción continua de la demostración como medio para enseñar y aprender a validar matemáticamente. En Scott, P. & Ruiz, Á. (Edits.), *Educación Matemática en las Américas 16* (págs. 399-412). Santo Domingo: Comité Interamericano de Educación Matemática. Acceso: 3/12/2019. Disponible en: http://ciaem-redumate.org/memorias-ciaem/xiv/pdf/Vol7Inv.pdf

Larios, V. (2018). Un estudio exploratorio de los esquemas que emplean los alumnos de bachillerato para validar resultados matemáticos. *Transformación, 14*(2), 190-201. Acceso: 3/12/2019. Disponible en: http://scielo.sld.cu/pdf/trf/v14n2/trf05218.pdf

Manrique, V. H., & Soler, M. N. (2014). El proceso de descubrimiento en la clase de matemáticas: los razonamientos abductivo, inductivo y deductivo. *Enseñanza de las Ciencias, 32*(2), 191-219. Acceso: 3/12/2019. Disponible en: https://ensciencias.uab.es/article/view/v32-n2-soler-Álvarez-manrique/1026-pdf-es

Mejía, J. P. (2015). *Alternativas de cómo presentar demostraciones matemáticas y evaluar su comprensión en el salón de clase. Conferencia presentada en Ciclo de Conferencias en Educación Matemática de Gemad*. Bogotá, Colombia. Acceso: 3/12/2019. Disponible en: http://funes.uniandes.edu.co/6474/1/Mej%C3%ADa2015Alternativas.pdf

Morales, C. A. (2008). *Los métodos de demostración en matemática*. Tesis de maestría inédita. Ciudad Guatemala: Universidad de San Carlos. Acceso: 3/12/2019. Disponible en: http://biblioteca.usac.edu.gt/tesis/07/07_1914.pdf

Parra, R. D. (2017). *La influencia del método de resolución de problemas en el aprendizaje de la asignatura de Matemática II en los estudiantes del segundo ciclo de la especialidad de educación primaria-básica alternativa de la Facultad de Pedagogía y Física*. Tesis de maestría inédita. Universidad Nacional de Educación Enrique Guzmán y Valle. Acceso: 3/12/2019. Disponible en: http://repositorio.une.edu.pe/handle/UNE/1251

Pólya, G. (1966). *Matemáticas y razonamiento plausible.* Madrid: Editorial TECNOS. S. A.

Ron, G., & Dreyfus, T. (2004). The use of models in teaching proof by mathematical induction. En Høines, M. J. & Fuglestad, A. B. (Edits.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (págs. 113-120). Bergen: Bergen University College.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical Problem Solving. [Versión de Library of Congress]*. Access: 3/12/2019. Available at: https://www.elsevier.com/books/mathematical-problem-solving/schoenfeld/978-0-12-628870-4

Conflicto de interés:

Los autores declaran que no existen conflictos de intereses.

Declaración de responsabilidad autoral:

Dr. C. Juan Álvarez Esteven: Participó en el diseño metodológico, la gestión de la información, la interpretación de la información y la escritura del artículo que es parte del contenido de su tesis doctoral.

Dra. C. Isabel Alonso Berenguer: Participó en el diseño metodológico, la interpretación de la información y la revisión del artículo.

Dr. C. Alexander Gorina Sánchez: Participó en el diseño metodológico, la interpretación de la información y la revisión del artículo.